N° d'enregistrement
au C.N.R.S:

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Mention Sciences Appliquées

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Pierre BONNEVILLE

Ingénieur des Arts et Manufactures

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Problème de Boussinesq pour un poinçon sphérique

Contribution à l'étude du contact elliptique

Soutenue le 26 Janvier 1972, devant la Commission d'Examen

MM. R. SIESTRUNCK Président

R. VICHNIEVSKY } Examinateurs

A. KAMMERER }

N° d'enregistrement
au C.N.R.S:

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES

Mention Sciences Appliquées

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS VI

par

Pierre BONNEVILLE

Ingénieur des Arts et Manufactures

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Problème de Boussinesq pour un poinçon sphérique

Contribution à l'étude du contact elliptique

Soutenue le 26 Janvier 1972, devant la Commission d'Examen

MM. R. SIESTRUNCK Président

R. VICHNIEVSKY, A. KAMMERER } Examinateurs

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

I N T R O D U C T I O N

Le contact de deux solides est l'un des problèmes fondamentaux de la mécanique appliquée, le lemme préalable à tout problème de structure.

Lorsque prenait corps, il y a près d'un siècle, la "Théorie Mathématique de l'Elasticité", nombre des plus grands auteurs: BARRE de SAINT VENANT, CLEBSCH, BOUSSINESQ, HERTZ, CERRUTI, se penchaient sur ce problème du contact dont ils dégageaient les solutions de base, et, pour le cas du contact sphérique, des formules d'application qui restent encore, en ce domaine, le principal outil de nos vérifications actuelles.

Le principe de SAINT-VENANT, en séparant le problème local du problème d'ensemble, ouvrait aux ingénieurs le champ des théories simplifiées de la Résistance des Matériaux, l'un des facteurs prépondérants, par l'étendue de ses applications, de la révolution industrielle en matière de Construction.

L'étude des sollicitations locales passait, pour de longues années, au second plan... Elle conservait néanmoins ses applications spécifiques, dont l'importance s'est progressivement accrue : pièces mécaniques, détails constructifs, et, plus récemment, mécanique des sols, voiles minces... etc.

Aujourd'hui, les progrès des techniques d'exécution, aussi bien que l'utilisation de calculateurs électroniques, conduisent à rechercher, au-delà des théories simplifiées, une connaissance de plus en plus détaillée des tensions dans les milieux contraints, et l'avancement insuffisant, ou la méconnaissance par les ingénieurs des problèmes de contact, n'ont pas toujours été sans incidence sur l'économie, voire sur la sécurité des projets.

Sans doute, si, depuis Hertz et Boussinesq, les recherches ont été relativement rares, d'importants résultats ont-ils été obtenus, soient, notamment, pour ne citer que le problème du contact normal sur un milieu semi-indéfini:

- dans le cas du contact sphérique, l'expression du déplacement et des tensions, en surface et sur l'axe de révolution (SNEDDON ... DINNIK)

- dans le cas du contact elliptique, l'expression du déplacement en surface (BELIAEV), et sur l'axe normal (LOURYE), permettant d'obtenir les tensions par dérivation. BELIAEV a, en particulier, obtenu une expression simple des contraintes au centre et aux sommets de l'ellipse de contact.

Ces résultats englobent apparemment le cas des points les plus périclités, et permettent, par la connaissance de la distribution superficielle de la charge, de calculer les tensions en tout point du milieu élastique :

- soit par une intégration numérique sur la surface de charge de la solution de Boussinesq,

- soit par la méthode des éléments finis.

De telles méthodes ne sont toutefois applicables qu'à un problème numérique particulier, en un nombre de points relativement restreint pour une étude triaxiale.

Plus récemment, une expression complète des tensions dans les deux plans de symétrie du contact a été obtenue par BESSELING, VAN BOMMEL et TEN HOEVE, avec application numérique correspondant au rapport des axes du contact $\frac{b}{a} = 0,5$. Ces expressions donnent également comme cas particulier les tensions en tout point pour le problème de révolution.

Dans un objectif voisin, la présente thèse apporte une contribution à l'étude détaillée de la distribution des tensions au voisinage du contact, dans un milieu élastique semi-indéfini limité par un plan.

En vue d'établir les lois de cette répartition, valeurs extrêmales, singularités, et l'influence de la variation des paramètres,

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550025_0021

il n'a pas été fait appel aux méthodes numériques envisagées ci-dessus, mais, dans la mesure du possible, à des solutions explicites.

Une première partie est relative à l'étude du contact sphérique. Les tensions à l'intérieur du milieu élastique s'expriment en fonctions élémentaires. Etabli pour un poinçon indéformable, le problème se généralise au cas du poinçon élastique.

La seconde partie traite du contact elliptique.
Les tensions sont étudiées:

- selon les deux axes de l'ellipse de contact, où elles s'expriment en fonctions élémentaires,
- selon l'axe normal du contact, en fonction de l'excentricité, et calculées pour la valeur du coefficient de Poisson $\nu = 0,3$.

Les calculs numériques ont été effectués à l'aide d'une calculatrice électronique de type PROGRAMMA 101.

o

o o

PREMIERE PARTIE

PROBLEME DE BOUSSINESQ POUR UN POINCON SPHERIQUE

CHAPITRE I - CALCUL DES TENSIONS

A - Méthode et base des calculs

La présente étude utilise et développe pour le cas du poinçon sphérique la méthode générale donnée en 1945 par SNEDDON et HARDING pour le problème du contact à symétrie de révolution à la surface plane d'un milieu élastique semi-indéfini.

Le principe de cette méthode, et le déroulement des calculs conduisant à l'établissement d'expressions des contraintes et déplacements en fonction d'intégrales d'une seule variable, sont rappelés au paragraphe ci-dessous.

Ces expressions sont établies pour un poinçon de révolution de méridienne quelconque, en contact selon un cercle de rayon a, sous les réserves suivantes:

. La symétrie de révolution limite le problème au cas d'une résultante de contact normale selon l'axe de révolution.

. Les contraintes tangentielles sont supposées nulles sur toute la surface limite, c'est à dire que le contact est parfaitement lisse.

. Le poinçon est considéré comme indéformable, ou, plus précisément, le déplacement vertical est supposé connu dans la zône de contact; ces deux conditions ne sont pas rigoureusement équivalentes en général, compte-tenu de l'hypothèse du contact lisse, approximation dont la validité sera examinée au chapitre II § D

1° - La méthode de SNEDDON et HARDING pour un poinçon de révolution

Equations générales en coordonnées cylindriques

Les équations générales de l'élasticité et conditions de compatibilité permettent d'exprimer les contraintes et déplacements à partir d'une fonction biharmonique Φ et de ses dérivées, soit, pour un problème de révolution, en coordonnées cylindriques avec les notations habituelles:

$$\sigma_r = \lambda \nabla^2 \frac{\partial \Phi}{\partial z} - 2(\lambda+\mu) \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial z}$$

$$\sigma_z = (3\lambda+4\mu)\ \nabla^2 \frac{\partial\Phi}{\partial z} - 2(\lambda+\mu)\ \frac{\partial^3\Phi}{\partial z^3}$$

$$\sigma_\theta = \lambda\nabla^2 \frac{\partial\Phi}{\partial z} - 2(\lambda+\mu)\ \frac{1}{r}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}$$

$$\tau_{rz} = (\lambda+2\mu)\ \frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\Phi - 2(\lambda+\mu)\frac{\partial^3\Phi}{\partial z^2\partial r}$$

$$u_r = -\frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\partial z}$$

$$u_z = \frac{\lambda+2\mu}{\mu}\nabla^2\Phi - \frac{\lambda+\mu}{\mu}\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\nabla^4\Phi = 0$$

∇^2 et ∇^4 respectivement laplacien et bilaplacien en coordonnées cylindriques.

Equation transformée

La méthode de SNEDDON et HARDING consiste à transformer cette équation biharmonique en utilisant la transformation de HANKEL:

$$G = \int_0^\infty r\ \Phi\ J_0(\xi r)\ dr$$

et la transformation inverse:

$$\Phi = \int_0^\infty \xi\ G\ J_0(\xi r)\ d\xi$$

J_0 désignant la fonction de Bessel de 1ère espèce d'ordre 0.

L'équation transformée en G se réduit à:

$$(\frac{d^2}{dz^2} - \xi^2)^2 G = 0$$

équation différentielle par rapport à la seule variable z, dont l'intégrale générale a pour expression:

$$G = (A + Bz)\ e^{\xi z} + (C + Dz)\ e^{-\xi z}$$

A, B, C, D fonctions arbitraires du paramètre ξ à déterminer selon les conditions aux limites.

Conditions aux limites

Les conditions aux limites s'écrivent après avoir exprimé les contraintes et déplacements en fonction de G, soient:

. contraintes et déplacement nuls pour $r \to \infty$ (toujours vérifiée)

- contraintes et déplacements nuls pour $z \infty$ ($\Rightarrow A = B = 0$)
- contraintes tangentielles nulles en surface ($\Rightarrow (\lambda+\mu)C = \lambda D$)

Seule subsiste la fonction inconnue D:

$$G = \frac{D}{\xi} \left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \xi z \right) e^{-\xi z}$$

- contrainte ou déplacement verticaux connus en surface:

$$(\sigma_z)_{z=0} = 0 \qquad \text{pour} \quad \rho = \frac{r}{a} \geq 1$$

$$-\frac{\mu a^3}{\lambda+\mu} [u_z(r)] = g(\rho) \quad \text{(fonction donnée)} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

Ces deux dernières conditions déterminent la fonction D, ou, en posant $\xi a = x$ et $x^2 D = f(x)$, la fonction f(x) par les deux relations:

$$\int_0^\infty f(x)\, J_0(\rho x)\, dx = g(\rho) \qquad \text{pour} \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$\int_0^\infty x\, f(x)\, J_0(\rho x)\, dx = 0 \qquad \text{pour} \quad \rho \geq 1$$

Utilisant la solution d'un tel système, due à TITCHMARSH et BUSBRIDGE, SNEDDON et HARDING obtiennent l'expression de f(x):

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cos x \int_0^1 y(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} g(y)\, dy + \frac{2}{\pi} \int_0^1 y(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} dy \int_0^1 g(uy)\, ux \sin(ux)\, du$$

Lorsque g(ρ) est un polynôme en ρ :

$$g(\rho) = \sum_n A_n \rho^n \qquad A_n \text{ coefficients constants, f(x) se réduit à une expression ne contenant que des intégrales simples aisément intégrables}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_n \frac{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 3/2)} A_n \left\{ \cos x + x \int_0^1 u^{n+1} \sin(ux)\, du \right\}$$

Γ désignant le symbole de Christoffel.

f(x) étant déterminée par l'une des expressions ci-dessus, G, transformée du potentiel Φ par la relation de Hankel, s'exprime en fonction de $x = \xi a$, de f(x), et de la variable sans dimension $\zeta = \frac{z}{a}$:

$$G(x,\zeta) = \frac{a\, f(x)}{x^3} \left[\frac{\lambda}{\lambda+\mu} + x\zeta \right] e^{-x\zeta}$$

Expression des contraintes et déplacements

Le report de $G(x,\zeta)$ dans les expressions des contraintes et déplacements fait apparaître, du fait de la transformation de Hankel sur

Φ et ses dérivées, des intégrales de forme:

$$(1) \qquad I_n^m = \int_o^\infty x^n \, f(x) \, J_m(\rho x) \, e^{-\zeta x} dx$$

J_m désignant la fonction de Bessel de 1ère espèce d'ordre m ($m = 0$ ou $m = 1$),

soient, avec cette notation, les expressions des contraintes et déplacements en fonction de 6 intégrales du type (1):

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_z = \dfrac{2(\lambda+\mu)}{a^4} \left[I_1^0 + \zeta \, I_2^0 \right] \\ \tau_{zr} = \dfrac{2(\lambda+\mu)}{a^4} \, \zeta \, I_2^1 \\ \sigma_\theta = \dfrac{2\lambda}{a^4} I_1^0 + \dfrac{2\mu}{\rho a^4} \left[I_0^1 - \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \zeta \, I_1^1 \right] \\ \sigma_r + \sigma_\theta = \dfrac{2}{a^4} \left[(2\lambda+\mu) \, I_1^0 - (\lambda+\mu) \, \zeta \, I_2^0 \right] \\ u_r = \dfrac{1}{a^3} \left[I_0^1 - \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \zeta \, I_1^1 \right] \\ u_z = -\dfrac{1}{a^3} \left[\dfrac{\lambda+2\mu}{\mu} I_0^0 + \dfrac{\lambda+\mu}{\mu} \zeta \, I_1^0 \right] \end{array} \right.$$

Applications de la méthode de SNEDDON et HARDING, obtention de solutions explicites

L'application de la méthode de Sneddon à un poinçon indéformable de méridienne connue se résume donc à:

. la détermination de la fonction f(x) à partir de g(ρ) par la solution de Busbridge. Si g(ρ) est un polynôme, f(x) sera de forme:

$f(x) = a_o \cos x + P \sin x + Q \cos x$ a_o étant une constante, P et Q polynômes en $\frac{1}{x}$, de degrés n et n+1, ou n+1 et n, selon la parité de n.

. le calcul des 6 intégrales I_n^m, numériquement ou explicitement par la relation (1), d'où l'expression des contraintes et déplacements par le système (2).

L'obtention d'une solution explicite par l'emploi de cette méthode est donc subordonnée à la possibilité d'obtenir des intégrales explicites:

. de la solution de Busbridge, condition notamment satisfaite lorsque $g(\rho)$ est un polynôme

. des 6 expressions I_n^m .

SNEDDON et HARDING ont déterminé, comme exemples d'application de leur méthode générale, la fonction $f(x)$ dans le cas:

. du cylindre droit de révolution $g(\rho) = C^{te}$

. du cône de révolution $g(\rho) = A_o + A_1\rho$

(avec détermination explicite des fonctions I_n^m en surface et sur l'axe normal, et contraintes correspondantes)

. de la sphère de grand rayon $g(\rho) = A_o + A_2\rho^2$

(avec calcul de la contrainte normale de surface)

SNEDDON devait, ultérieurement, donner une solution explicite complète, en tout point du milieu élastique, dans le cas du cylindre droit de révolution appuyé par sa base.

2° - Application au cas particulier du poinçon sphérique

Pour un poinçon indéformable, en contact selon une calotte sphérique ou paraboloïdale, de rayon de courbure R grand devant le rayon du contact a, et de flèche ϵ, le déplacement vertical s'écrit:

$$\left[u_z(\rho) \right]_{z=0} = b + \epsilon(1 - \rho^2)$$

$$g(\rho) = A_o + A_2\rho^2 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_o = -\frac{\mu}{\lambda+\mu} a^3 (b+\epsilon) \\ A_2 = \frac{\mu}{\lambda+\mu} a^3 \epsilon \end{cases}$$

d'où par la solution de Busbridge:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} A_o \left\{ \cos x + x \int_0^1 u \sin ux \, du \right\} + \frac{2}{\pi} A_2 \cdot \frac{2}{3} \left\{ \cos x + \int_0^1 x u^3 \sin ux \, du \right\}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \left(A_o + 2A_2 \right) \frac{\sin x}{x} + \frac{8}{\pi} A_2 \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right)$$

La constante b s'obtient en écrivant que, dans le cas d'un poinçon sphérique non tronqué le long du bord du contact, la contrainte normale de surface reste finie pour $\rho = 1$. Le calcul de $(\sigma_z)_{z=0}$:

$(\sigma_z)_{z=0} = \frac{2\lambda+\mu}{a^4} (I_1^0)_{z=0}$ avec $(I_1^0)_{z=0} = \int_0^\infty f(x)\, J_o(\rho x)\, dx$ montre que le coefficient de $\frac{\sin x}{x}$ dans $f(x)$ doit être nul : $A_o + 2A_2 = 0 \Rightarrow \underline{b = \epsilon}$

D'où les expressions de $f(x)$ et I_n^m $(n=0, 1 \text{ ou } 2,\ m=0 \text{ ou } 1)$

$$f(x) = A \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) \qquad \text{en posant} \quad A = \frac{8}{\pi} \frac{\mu}{\lambda+\mu} a^3 \epsilon$$

(3) $$\boxed{I_n^m = A \int_0^\infty x^n \left(\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x^3} \right) J_m(\rho x)\, e^{-\zeta x} dx}$$

B - Calcul des fonctions auxiliaires I_n^m

Les intégrales I_n^m, d'où les tensions par le système (1) ont été calculées par Sneddon et Harding dans les cas particuliers suivants :

- en surface où l'on a $e^{-\zeta x} \equiv 1$
- sur l'axe de révolution $J_m(\rho x) \equiv 1$ pour $m = 0$

$J_m(\rho x) \equiv 0$ pour $m = 1$

Le calcul sera traité ci-après dans le cas général.

1° Notations

Nous adopterons les notations suivantes :

$$(4)\quad \begin{cases} I_{1j} = \int_o^\infty \frac{\sin x}{x^{j-1}}\, e^{-\zeta x} J_o(\rho x)\, dx \\ I'_{1j} = \int_o^\infty \frac{\sin x}{x^{j-1}}\, e^{-\zeta x} J_1(\rho x)\, dx \\ I_{2j} = \int_o^\infty \frac{\cos x}{x^{j-1}}\, e^{-\zeta x} J_o(\rho x)\, dx \\ I'_{2j} = \int_o^\infty \frac{\cos x}{x^{j-1}}\, e^{-\zeta x} J_1(\rho x)\, dx \\ I_{3j} = \int_o^\infty \left(\frac{\cos x}{x^{j-1}} - \frac{\sin x}{x^j} \right) e^{-\zeta x} J_o(\rho x)\, dx \\ I'_{3j} = \int_o^\infty \left(\frac{\cos x}{x^{j-1}} - \frac{\sin x}{x^j} \right) e^{-\zeta x} J_1(\rho x)\, dx \end{cases}$$

Les deux dernières intégrales sont, au coefficient A près, des intégrales du type I_n^m de Sneddon pour le poinçon sphérique :

$$I_n^o = A\, I_{3j} \qquad I_n^1 = A\, I'_{3j} \qquad (\text{avec } j = -n + 3)$$

soient, pour les intégrales intervenant dans les formules (2) :

$$(5)\quad \begin{cases} I_2^o = A\, I_{31} & I_2^1 = A\, I'_{31} \\ I_1^o = A\, I_{32} & I_1^1 = A\, I'_{32} \\ I_o^o = A\, I_{33} & I_o^1 = A\, I'_{33} \end{cases}$$

2° Abaissement du degré du dénominateur

Les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre 1 et 2 sont liées par les 2 relations intégrales :

$$\int J_1(x)\,dx = -J_o(x) \qquad \text{et} \qquad \int_o^x x\,J_o(x)\,dx = x\,J_1(x)$$

d'où

$$(6)\quad \int J_1(\rho x)\,dx = -\frac{Jo(\rho x)}{\rho} \qquad \text{et} \qquad \int_o^x x\,J_o(\rho x)\,dx = \frac{x\,J1(\rho x)}{\rho}$$

En utilisant l'une ou l'autre de ces relations pour intégrer par parties des intégrales des types précédents, on ramène le calcul à celui d'intégrales dont le dénominateur est du degré le plus bas :

a) Intégrales de type I_{3j}

On intègre par parties $I'_{3,\,j-1}$

$$I'_{3,\,j-1} = \int_o^\infty \left(\frac{\cos x}{x^{j-2}} - \frac{\sin x}{x^{j-1}}\right) e^{-\zeta x} \cdot J_1(\rho x)\,dx$$

$$I'_{3,\,j-1} = -\left[\left(\frac{\cos x}{x^{j-2}} - \frac{\sin x}{x^{j-1}}\right) \frac{Jo(\rho x)}{\rho}\, e^{-\zeta x}\right]_o^\infty$$

$$+\frac{1}{\rho}\int_o^\infty \left[-\frac{\sin x}{x^{j-2}} - \left(\frac{\cos x}{x^{j-1}} - \frac{\sin x}{x^{j}}\right)(j-1) - \zeta\left(\frac{\cos x}{x^{j-2}} - \frac{\sin x}{x^{j-1}}\right)\right] e^{-\zeta x} J_o(\rho x)\,dx$$

$$I'_{3,\,j-1} = -\left[\left(\frac{\cos x}{x^{j-2}} - \frac{\sin x}{x^{j-1}}\right) \frac{Jo(\rho x)}{\rho}\, e^{-\zeta x}\right]_o^\infty - \frac{1}{\rho}\left[I_{1,j-1} + (j-1)\,I_{3j} + \zeta\, I_{3,j-1}\right]$$

$$= -Kj - \frac{1}{\rho}\left[I_{1,j-1} + (j-1)\,I_{3j} + \zeta\, I_{3,j-1}\right]$$

L'expression Kj est nulle pour j = 1,2 ou 3 ($Kj \sim -\dfrac{1}{3\rho\, x^{j-4}}$, $x \to 0$)

D'où la relation

$$I_{3j} = -\frac{1}{j-1}\left(\rho\, I'_{3,j-1} + \zeta\, I_{3,j-1} + I_{1,j-1}\right)$$

Soient, pour j = 3 ou 2 :

$$(7)\quad \begin{cases} I_{33} = -\frac{1}{2}\left(\rho\, I'_{32} + \zeta\, I_{32} + I_{12}\right) \\ I_{32} = -\left(\rho\, I'_{31} + \zeta\, I_{31} + I_{11}\right) \end{cases}$$

b) Intégrales de type I'_{3j}

On intègre de même par parties $I_{3,\,j-1}$

$$I_{3,j-1} = \int_o^\infty \left(\frac{\cos x}{x^{j-1}} - \frac{\sin x}{x^j}\right) e^{-\zeta x} \cdot x\, Jo\,(\rho x)\, dx$$

Après groupement des termes :

$$I_{3,j-1} = \left[\left(\frac{\cos x}{x^{j-2}} - \frac{\sin x}{x^{j-1}}\right) e^{-\zeta x} \frac{J_1(\rho x)}{\rho}\right]_o^\infty + \frac{1}{\rho}\left[I'_{1,j-1} + j\, I'_{3j} + \zeta\, I'_{3,j-1}\right]$$

$$= K'_j + \frac{1}{\rho}\left[I'_{1,j-1} + j\, I'_{3j} + \zeta\, I'_{3,j-1}\right]$$

On vérifie de même que $K'_j \sim \left(-\frac{1}{3x^{j-5}}\right)_{\lim x \to 0}$

$$K'_j = 0 \text{ pour } j = 3, 2 \text{ ou } 1.$$

Donc $$I'_{3j} = \frac{1}{j}\left(\rho\, I_{3,j-1} - \zeta\, I'_{3,j-1} - I'_{1,j-1}\right)$$

Soient, pour $j = 3$ ou $j = 2$

$$(8) \quad \begin{cases} I'_{33} = \frac{1}{3}\left(\rho\, I_{32} - \zeta\, I'_{32} - I'_{12}\right) \\ I'_{32} = \frac{1}{2}\left(\rho\, I_{31} - \zeta\, I'_{31} - I'_{11}\right) \end{cases}$$

c) Relations complémentaires

On obtient directement selon les définitions du groupe (4) :

$$(9) \quad \begin{cases} I_{31} = I_{21} - I_{12} \\ I'_{31} = I'_{21} - I'_{12} \end{cases}$$

Le calcul des 6 intégrales I_{3j}, I'_{3j} est ainsi ramené par les relations (7), (8) (9) à celui des intégrales plus simples :

$$I_{21} \quad I_{12} \quad I_{11}$$

$$I'_{21} \quad I'_{12} \quad I'_{11}$$

Les trois dernières peuvent encore s'exprimer en fonction de I_{21}, I_{12}, I_{11} :

. En intégrant I'_{21} par parties :

$$I'_{21} = \int_o^\infty \cos x\, e^{-\zeta x} \cdot J_1(\rho x)\, dx$$

$$= -\left[\cos x\, e^{-\zeta x} \frac{Jo\,(\rho x)}{\rho}\right]_o^\infty + \int_o^\infty (-\sin x - \zeta \cos x) \cdot Jo\,(\rho x)\, e^{-\zeta x}\, dx$$

$$(10) \quad I'_{21} = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho} I_{11} - \frac{\zeta}{\rho} I_{21}$$

. En intégrant I'_{11} par parties :

$$I'_{11} = \int_o^\infty \sin x\, e^{-\zeta x} \cdot J_1(\rho x)\, dx = -\left[\sin x\, e^{-\zeta x} \frac{J_o(\rho x)}{\rho}\right]_o^\infty + \frac{1}{\rho} I_{21} - \frac{\zeta}{\rho} I_{11}$$

$$(11) \qquad I'_{11} = -\frac{\zeta}{\rho} I_{11} + \frac{1}{\rho} I_{21}$$

- En intégrant I_{11} :

$$I_{11} = \int_o^\infty \sin x\, J_o(\rho x)\, e^{-\zeta x}\, dx = \int_o^\infty \frac{\sin x}{x}\, e^{-\zeta x} \cdot x\, J_o(\rho x)\, dx$$

$$= \left[\sin x\, e^{-\zeta x} \frac{J_1(\rho x)}{\rho}\right]_o^\infty - \frac{1}{\rho} I'_{21} + \frac{1}{\rho} I'_{12} + \frac{\zeta}{\rho} I'_{11}$$

$$I_{11} = 0 + \frac{1}{\rho}\left[I'_{12} + \zeta I'_{11} - I'_{21} \right]$$

Compte tenu de (10) et (11) nous obtenons

$$(12) \qquad I'_{12} = \frac{1}{\rho} + \frac{\rho^2 + \zeta^2 - 1}{\rho} I_{11} - \frac{2\zeta}{\rho} I_{21}$$

Cependant, dans la programmation des calculs, I'_{12}, calculé après I_{31} sera obtenu plus commodément à l'aide de la relation ci-dessous (intégration par parties de I'_{12}) :

$$(13) \quad I'_{12} = \frac{1}{\rho} I_{32} - \frac{\zeta}{\rho} I_{12} + \frac{1}{\rho}$$

d) Expression des intégrales I_n^m en fonction de I_{11}, I_{21}, I_{12}

A l'aide des relations (7) (8) (9) (10) (11) (13) on obtient le système suivant :

$$(14) \quad \begin{cases} \dfrac{I_2^o}{A} = I_{31} = I_{21} - I_{12} \\ \dfrac{I_2^1}{A} = I'_{31} = \dfrac{\zeta}{\rho} I_{21} - \dfrac{\zeta^2 + \rho^2}{\rho} I_{11} \\ \dfrac{I_1^o}{A} = I_{32} = -(\zeta I_{31} + \rho I'_{31} + I_{11}) \\ \dfrac{I_1^1}{A} = I'_{32} = \dfrac{1}{2}\left(\rho I_{31} - \zeta I'_{31} + \dfrac{\zeta}{\rho} I_{11} - \dfrac{1}{\rho} I_{21}\right) \\ \dfrac{I_o^o}{A} = I_{33} = -\dfrac{1}{2}(\zeta I_{32} + \rho I'_{32} + I_{12}) \\ \dfrac{I_o^1}{A} = I'_{33} = \dfrac{1}{3}\left(\rho I_{32} - \zeta I'_{32} - I'_{12}\right) \\ I'_{12} = \dfrac{1}{\rho}(I_{32} - \zeta I_{12} + 1) \end{cases}$$

D'où par substitution

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{I_2^o}{A} = I_{31} = I_{21} - I_{12} \\ \dfrac{I_2^1}{A} = I'_{31} = -\dfrac{\zeta^2+\rho^2}{\rho} I_{11} + \dfrac{\zeta}{\rho} I_{21} \\ \dfrac{I_1^o}{A} = I_{32} = (\rho^2+\zeta^2-1) I_{11} - 2\zeta I_{21} + \zeta I_{12} \\ \dfrac{I_1^1}{A} = I'_{32} = \dfrac{\zeta}{2\rho}(\rho^2+\zeta^2+1) I_{11} + \dfrac{\rho^2-\zeta^2-1}{2\rho} I_{21} - \dfrac{\rho}{2} I_{12} \\ \dfrac{I_o^o}{A} = I_{33} = \dfrac{\zeta}{4}(-3\rho^2-3\zeta^2+1) I_{11} + \dfrac{-\rho^2+5\zeta^2+1}{4} I_{21} + \dfrac{\rho^2-2\zeta^2-2}{2} I_{12} \\ \dfrac{I_o^1}{A} = I'_{33} = \dfrac{(\rho^2+\zeta^2)(2\rho^2-\zeta^2-2) - 2\rho^2-\zeta^2+2}{6\rho} I_{11} \\ \qquad - \dfrac{\zeta}{6\rho}(5\rho^2-\zeta^2-5) I_{21} + \dfrac{\rho\zeta}{2} I_{12} - \dfrac{1}{3\rho} \end{cases}$$

La programmation sera faite directement à partir du système (14) sans utiliser les expressions 15.

3° Calcul des intégrales I_{11}, I_{21}, I_{12}

a) Intégrales I_{11} et I_{21}

$$I_{11} = \int_o^\infty \sin x\, e^{-\zeta x} J_o(\rho x)\, dx$$

$$I_{21} = \int_o^\infty \cos x\, e^{-\zeta x} J_o(\rho x)\, dx$$

Elles seront obtenues comme partie réelle et imaginaire de l'intégrale :

$$I = I_{21} + I_{11} = \int_o^\infty e^{-(+\zeta - i)x} J_o(\rho x)\, dx$$

Cette intégrale sera calculée par une méthode analogue à celle du calcul de $\int_o^\infty e^{-cx} J_o(\rho x)\, dx$, pour c réel positif, en généralisant au cas de c complexe à partie réelle positive.

$$c = \zeta - i$$

On sait que $J_o(\rho x) = \frac{1}{\pi}\int_o^\pi \cos(\rho x \sin\theta)\, d\theta$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_o^\pi \left(e^{i\rho x \sin\theta} + e^{-i\rho x \sin\theta}\right) d\theta$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_o^\infty e^{-(\zeta-i)x}\int_o^\pi e^{i\rho x \sin\theta}\,\alpha\theta\,dx + \int_o^\infty e^{-(\zeta-i)x}\int_o^\pi e^{-i\rho\sin\theta}\,d\theta\,dx\right\}$$

En intervertissant l'ordre des intégrations dans les intégrales doubles :

$$I = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_o^\pi d\theta\int_o^\infty e^{-[\zeta-i(\rho\sin\theta+1)]x}\,dx + \int_o^\pi d\theta\int_o^\infty e^{-[\zeta+i(\rho\sin\theta-1)]x}\,dx\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\int_o^\pi \left[\frac{e^{-[\zeta-i(\rho\sin\theta+1)]x}}{-\zeta+i(\rho\sin\theta+1)}\right]_0^\infty d\theta + \int_o^\pi \left[\frac{e^{-[\zeta+i(\rho\sin\theta-1)]x}}{-\zeta-i(\rho\sin\theta-1)}\right]^\infty d\theta\right\}$$

$$I = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_o^\pi \frac{d\theta}{\zeta-i(\rho\sin\theta+1)} + \int_o^\pi \frac{d\theta}{\zeta+i(\rho\sin\theta-1)}\right\}$$

Soit, après réductions :

$$I = \frac{2}{\pi}(\zeta-i)\int_o^{\pi/2}\frac{d\theta}{(\zeta-i)^2+\rho^2\sin^2\theta}$$

En posant $\operatorname{tg}\theta = t$, et introduisant la constante complexe :

$z_1 = \left[1+\frac{\rho^2}{(\zeta-i)^2}\right]^{1/2}$ (z_1 étant l'une des déterminations), il vient après simplification :

$$I = \frac{2}{\pi(\zeta-i)}\int_o^\infty \frac{dt}{1+z_1^2t^2} = \frac{2}{\pi(\zeta-i)\cdot z_1}\left[\operatorname{arctg}(z_1 t)\right]_o^\infty$$

Calcul de $\left[\operatorname{arctg}(z_1 t)\right]_o^\infty$ (cf. Annexe n° 1)

Soit $u = \operatorname{arctg}(z_1 t)$ $\quad z_1 t = -i\,\frac{e^{2iu}-1}{e^{2iu}+1}$

$t = 0 \Rightarrow e^{2iu} - 1 = 0 \Rightarrow u = k\pi$

$t = \infty \Rightarrow e^{2iu} + 1 = 0 \Rightarrow u = \frac{\pi}{2} + k'\pi$

$\left[u\right]_o^\infty = \frac{\pi}{2} + (k'-k)\pi$

$(k' - k)$ est tel que l'on ait une même détermination de $\operatorname{arctg}(z_1 t)$ sur l'intervalle $(0, +\infty)$, d'où, au signe près $\left[u\right]_o^\infty = \pm\frac{\pi}{2}$

$$I = \pm\frac{1}{(\zeta-i)\cdot z_1} = \pm\left[\rho^2+(\zeta-i)^2\right]^{-1/2} = I_{21} + i\,I_{11}$$

Le signe sera tel que la détermination choisie soit celle qui correspond au cas particulier $\rho = 0$, par exemple, pour lequel $I = \frac{1}{\zeta - i}$

Après quelques calculs d'identification, on obtient :

$$(17)\quad I_{11} = \int_o^\infty \sin x\, J_o(\rho x)\, e^{-\zeta x}\, dx = \sqrt{\frac{-(\rho^2+\zeta^2-1)+\sqrt{(\rho^2+\zeta^2-1)^2+4\zeta^2}}{2\left[(\rho^2+\zeta^2-1)^2+4\zeta^2\right]}}$$

$$(18)\quad I_{21} = \int_o^\infty \cos x\, J_o(\rho x)\, e^{-\zeta x}\, dx = \sqrt{\frac{\rho^2+\zeta^2-1+\sqrt{(\rho^2+\zeta^2-1)^2+4\zeta^2}}{2\left[(\rho^2+\zeta^2-1)^2+4\zeta^2\right]}}$$

Cas particuliers :

$$(19)\quad \rho = 0 \begin{cases} I_{11} = \int_o^\infty \sin x\, e^{-\zeta x}\, dx = \dfrac{1}{1+\zeta^2} \\ I_{21} = \int_o^\infty \cos x\, e^{-\zeta x}\, dx = \dfrac{\zeta}{1+\zeta^2} \end{cases}$$

$$(20)\quad \zeta = 0 \begin{cases} \rho > 1 & \begin{cases} I_{11} = \int_o^\infty \sin x\, J_o(\rho x)\, dx = 0 \\ I_{21} = \int_o^\infty \cos x\, J_o(\rho x)\, dx = \dfrac{1}{\sqrt{\rho^2-1}} \end{cases} \quad \text{Résultats connus} \\ \rho < 1 & \begin{cases} I_{11} = \int_o^\infty \sin x\, J_o(\rho x)\, dx = \dfrac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \\ I_{21} = \int_o^\infty \cos x\, J_o(\rho x)\, dx = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Forme trigonométrique de I_{11} et I_{21}

En posant $K^2 = \sqrt{(\rho^2+\zeta^2-1)^2+4\zeta^2}$ $\qquad I_{11} = \dfrac{\cos \varphi/2}{k}$

et $\varphi = \text{Arccos}\dfrac{\rho^2+\zeta^2-1}{k^2}$ $\qquad \Rightarrow \qquad I_{21} = \dfrac{\sin \varphi/2}{k}$

Ces deux expressions ont été obtenues par SNEDDON à propos de l'étude d'un poinçon cylindrique à base plane.

b) Intégrale $I_{12} = \int_o^\infty \dfrac{\sin x}{x}\, e^{-\zeta x}\, J_o(\rho x)\, dx$

Remplaçons dans les intégrales I_{21} et I_{11} sinx et cos x par sin γx et cos γx.

$$I'_{21}+i\, I'_{11} = \int_o^\infty \cos \gamma x\, e^{-\zeta x}\, J_o(\rho x)\, dx + i \int_o^\infty \sin \gamma x\, e^{-\zeta x}\, J_o(\rho x)\, dx$$

$$= \int_o^\infty e^{-(\zeta-\gamma i)x}\, J_o(\rho x)\, dx$$

d'où, comme ci-dessus :

$$I'_{21}+i\, I'_{11} = \varepsilon\left[\rho^2+(\zeta-\gamma i)^2\right]^{-1/2} \qquad (\varepsilon = \pm 1 \text{ à définir})$$

En intégrant les deux membres par rapport à γ de 0 à 1, il vient :

$$\int_o^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\zeta x} J_o(\rho x)dx - i \int_o^\infty \frac{\cos x}{x} e^{-\zeta x} J_o(\rho x)dx = \frac{\varepsilon}{i}\left[\text{argsh}\ \frac{\zeta - i\gamma}{\rho}\right]_{\gamma=0}^{\gamma=1}$$

D'où :

$$I_{12} = \Re\left(\frac{\varepsilon}{i}\left[\text{arg sh}\ \frac{\zeta - i\gamma}{\rho}\right]_{\gamma=0}^{\gamma=1}\right) = \varepsilon\, \mathcal{J}\left(\text{arg sh}\ \frac{\zeta - i\gamma}{\rho}\right)_{\gamma=0}^{\gamma=1}$$

Ce type de fonction de variable complexe, de forme :

$x + iy = \text{arg sh}\ (X+iY)$ est calculé à l'annexe n° 2.

Pour $X > 0$ et $Y < 0$, la partie imaginaire a pour expression :

$$y = -\varepsilon' \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{X^2+Y^2+1 - \sqrt{(X^2+Y^2-1)^2+4X^2}}{2}} + \frac{1-\varepsilon'}{2}\pi + 2k\pi$$

avec $\varepsilon' = \pm 1$

Après simplifications

$$\mathcal{J}\left[\text{arg sh}\ \frac{\zeta - i\gamma}{\rho}\right]_{\gamma=0}^{\gamma=1} = [y]_{\gamma=0}^{\gamma=1}$$

D'où, au signe près

$$I_{12} = \varepsilon'' \text{ Arc sin} \sqrt{\frac{(\rho^2+\zeta^2+1) - \sqrt{(\rho^2+\zeta^2+1)^2 - 4\rho^2}}{2\rho^2}} \quad \text{avec } \varepsilon'' = \pm 1$$

On vérifie sur un cas particulier, par exemple $\rho = 0$ que la détermination à retenir correspond à $\varepsilon'' = 1$:

$$\begin{cases} (\lim_{\rho \to 0} I_{12}) = \varepsilon'' \text{ Arc sin} \sqrt{\dfrac{1}{1+\zeta^2}} \\ \int_o^\infty \dfrac{\sin x}{x} e^{-\zeta x} dx = \text{Arctg}\ \dfrac{1}{\zeta} = \text{Arc sin} \sqrt{\dfrac{1}{1+\zeta^2}} \Rightarrow \varepsilon'' = +1 \end{cases}$$

(2.1) $$I_{12} = \int_o^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-\zeta x} \cdot J_o(\rho x)\, dx = \text{Arc sin} \sqrt{\frac{\rho^2+\zeta^2+1-\sqrt{(\rho^2+\zeta^2+1)^2-4\rho^2}}{2\rho^2}}$$

Cas particuliers

(2.2) $$\rho = 0 \Rightarrow I_{12} = \text{Arctg}\ \frac{1}{\zeta}$$

$$\zeta = 0 \Rightarrow \begin{cases} I_{12} = \dfrac{\pi}{2} & \text{pour } \rho \leq 1 \\ I_{12} = \text{Arc sin}\ \dfrac{1}{\rho} & \text{pour } \rho \geq 1 \end{cases} \quad (2.3)$$

Paramètres de THOMAS et HOERSCH

Les intégrales I_{11} I_{21} et I_{12} s'expriment simplement en fonction des paramètres α et β utilisés par THOMAS et HOERSCH pour les problèmes de contact:

$$\begin{cases} r = a \cos\beta \, ch\alpha \\ z = a \sin\beta \, sh\alpha \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} \rho = \cos\beta \, ch\alpha \\ \zeta = \sin\beta \, sh\alpha \end{cases}$$

d'où

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{1 - \rho^2 - \zeta^2 + \sqrt{(1 - \rho^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2}}{2}}$$

$$sh\alpha = \sqrt{\frac{-(1 - \rho^2 - \zeta^2) + \sqrt{(1 - \rho^2 - \zeta^2)^2 + 4\zeta^2}}{2}}$$

$$I_{11} = \frac{\sin\beta}{\sin^2\beta + sh^2\alpha} \qquad I_{21} = \frac{sh\alpha}{\sin^2\beta + sh^2\alpha} \qquad I_{12} = \text{arc sin}\frac{1}{ch\alpha} = \text{arc cot } sh\alpha$$

De même, le groupe des relations (15) devient:

(15 bis)

$$\begin{cases} I_{31} = \dfrac{sh\alpha}{\sin^2\beta + sh^2\alpha} - \text{Arc cot } sh\alpha \\ I'_{31} = \dfrac{-\sin\beta \cos\beta}{ch\alpha \, (\sin^2\beta + sh^2\alpha)} \\ I_{32} = -\sin\beta + sh\alpha \sin\beta \text{ Arc cot } sh\alpha \\ I'_{32} = \dfrac{sh\alpha \cos\beta}{2ch\alpha} - \dfrac{ch\alpha \cos\beta}{2} \text{ Arc cot } sh\alpha \\ I_{33} = -\dfrac{sh\alpha}{4}(1 - 3\sin^2\beta) + \dfrac{1}{2}(3 - ch^2\alpha - \cos^2\beta) \text{Arc cot } sh\alpha \\ I'_{33} = \dfrac{1}{2} ch\alpha \cos\beta \, sh\alpha \sin\beta \text{ Arc cot } sh\alpha - \dfrac{2\sin^2\beta - 3sh^2\alpha \cos^2\beta \sin^2\beta - 2}{6 \, ch\alpha \cos\beta} \end{cases}$$

C - Expression des tensions

1° Coordonnées et contraintes réduites

Nous utiliserons les coordonnées sans dimension $\rho = \frac{r}{a}$, $\zeta = \frac{z}{a}$ coordonnées cylindriques rapportées au rayon du cercle de charge.

De même, les contraintes seront rapportées à la pression axiale p_o prise pour unité.

Or, d'après (2)

$$\left[\sigma_z \right]_{\substack{\rho=0 \\ \zeta=0}} = -p_o = \left\{ \frac{2(\lambda+\mu)}{a^4} \left[I_1^o + I_2^o \right] \right\}_{\substack{\rho=0 \\ \zeta=0}}$$

Les expressions (14) et (20) donnent, pour $\rho = \zeta = 0$:

$$I_1^o = - A I_{11} \qquad I_{11} = 1 \implies p_o = A . \frac{2(\lambda+\mu)}{a^4}$$

2° Expression générale des contraintes

Tenant compte de l'expression de p_o et conservant comme seul paramètre le coefficient de Poisson ν , à la place des coefficients de Lamé, on déduit l'expression des composantes cylindriques des contraintes du système (2) :

$$(24) \quad \begin{cases} \sigma_z = \frac{p_o}{A} \left(I_1^o + \zeta I_2^o \right) \\ \tau_{rz} = \frac{p_o}{A} \zeta I_2^1 \\ \sigma_\theta = \frac{p_o}{A} \left[I_1^o - \frac{\zeta}{\rho} I_1^1 + (1 - 2\nu) . \left(\frac{I_o^1}{\rho} - I_1^o \right) \right] \\ \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{p_o}{A} \left[2 I_1^o - \zeta I_2^o - (1 - 2\nu) I_1^o \right] \end{cases}$$

Soit, avec $p_o = 1$ et (5) :

$$(25) \quad \begin{cases} \sigma_r = - \zeta I_{31} + \frac{\zeta}{\rho} I'_{32} - \frac{1 - 2\nu}{\rho} I'_{33} + I_{32} \\ \sigma_z = I_{32} + \zeta I_{31} \\ \sigma_\theta = I_{32} - \frac{\zeta}{\rho} I'_{32} + (1 - 2\nu) . \left(\frac{1}{\rho} I'_{33} - I_{32} \right) \\ \tau_{rz} = \zeta I'_{31} \end{cases}$$

Les $I_{jj'}$ et $I'_{jj'}$ s'expriment par le système (15) en fonctions linéaires de I_{11}, I_{21} et I_{12}, ces trois dernières intégrales étant elles-mêmes données par les expressions (17), (18) et (21)

Paramètres de THOMAS et HOERSCH, expressions de BESSELING

Si l'on utilise les paramètres de THOMAS et HOERSCH, les intégrales $I_{jj'}$ et $I'_{jj'}$ sont données par le système (15 bis), d'où, toutes réductions faites, les expressions des contraintes:

$$\sigma'_r = sh\alpha \sin\beta \left[(1+\nu)\text{Arc cot } sh\alpha + (1-\nu)\frac{th\alpha}{sh\alpha} - \frac{sh\alpha}{\sin^2\beta + sh^2\alpha}\right] - \sin\beta + \frac{1-2\nu}{3}\frac{1-\sin^3\beta}{ch^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\sigma_z = \frac{-\sin^3\beta}{\sin^2\beta + sh^2\alpha}$$

$$\sigma_\theta = sh\alpha \sin\beta \left[(1+\nu)\text{Arc cot } sh\alpha - (1-\nu)\frac{th\alpha}{ch\alpha}\right] - 2\nu\sin\beta - \frac{1-2\nu}{3}\frac{1-\sin^3\beta}{ch^2\alpha\cos^2\beta}$$

$$\tau_{rz} = \frac{-th\,\alpha\cos\beta\sin^2\beta}{\sin^2\beta + sh^2\alpha}$$

On retrouve les expressions obtenues par BESSELING, VAN BOMMEL et TEN HOEVE en 1968. Seule l'expression de σ_r avait été donnée sous une forme différente que l'on obtient également, aprés quelques calculs, à partir de l'expression ci-dessus:

$$\sigma_r = sh\alpha \sin\beta \left[(1+\nu)\text{Arc cot } sh\alpha - (1-\nu)\frac{th\alpha}{ch\alpha} - \frac{th\alpha\cos^2\beta}{ch\alpha\,(sh^2\alpha + \sin^2\beta)}\right]$$

$$- 2\nu\sin\beta - \frac{1-2\nu}{ch^2\alpha\cos^2\beta}\left[\frac{2}{3}(1-\sin^3\beta) - (1-\sin\beta)\right]$$

La programmation simultanée des composantes de contraintes reste de toute façon plus simple à partir des expressions cartésiennes de I_{11} I_{21} et I_{12} et des relations linéaires (14) et (25) que par l'emploi des expressions paramétriques ci-dessûs.

3° Cas de simplification

a) Contraintes de surface $\zeta = 0$

En surface, les contraintes σ_r , σ_z , σ_θ sont principales.

Par les expressions simplifiées de I_{11} , I_{21} et I_{12} données en (20) et (23) on obtient:

En dehors du cercle de charge ($\rho \geqslant 1$)

$$(26) \qquad \begin{cases} \sigma_r = -\sigma_\theta = \dfrac{1 - 2\nu}{3\rho^2} \\ \sigma_z = 0 \end{cases}$$

état de contraintes de cisaillement simple

A l'intérieur du cercle de charge ($\rho \leqslant 1$)

$$\sigma_r = -\sqrt{1 - \rho^2} + (1 - 2\nu)\,\frac{1 - (1 - \rho^2)^{3/2}}{3\rho^2}$$

$$\sigma_z = -\sqrt{1 - \rho^2}$$

$$(27) \qquad \sigma_\theta = -2\nu\sqrt{1 - \rho^2} - (1 - 2\nu)\,\frac{1 - (1 - \rho^2)^{3/2}}{3\rho^2}$$

En particulier,

- au centre : $\sigma_z = -1 \quad \sigma_r = \sigma_\theta = -\dfrac{1 + 2\nu}{2}$

- au bord du contact : $\sigma_z = 0$, $\sigma_r = -\sigma_\theta = \dfrac{1 - 2\nu}{3}$

Le diagramme de charge $p = -\sigma_z$ pour $p_o = 1$, est hémisphérique, d'où une charge totale:

$P = \dfrac{2}{3}\pi$ en coordonnées réduites,

$P = 2/3 \cdot \pi\, p_o\, a^2$ en coordonnées dimensionnelles

b) Contraintes sur l'axe ($\varphi = 0$)

Pour les valeurs particulières (19) et (22) de I_{11}, I_{21} et I_{12}.

$$(28)\qquad \begin{cases} \sigma_r = \sigma_\theta = (1+\nu)\left(\zeta \operatorname{Arc\,tg} \dfrac{1}{\zeta} - 1\right) + \dfrac{1}{2(1+\zeta^2)} \\ \sigma_z = -\dfrac{1}{1+\zeta^2} \end{cases}$$

c) Point éloigné situé dans le milieu élastique

(ρ, ζ et $u = \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}$ grands devant l'unité)

Pour un point éloigné de la zone chargée, un développement limité des expressions (17), (18) et (21) donne :

$$I_{11} \sim \frac{\zeta}{u^3}\left(1 + \frac{3}{2u^2} - \frac{5\zeta^2}{2u^4} + \ldots\right)$$

$$I_{21} \sim \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{2u^2} - \frac{3\zeta^2}{2u^4} + \ldots\right)$$

$$I_{12} \sim \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{6u^2} - \frac{\zeta^2}{2u^4} + \ldots\right)$$

D'où par (15) et (25) la partie principale des composantes de contraintes :

$$(29)\qquad \begin{cases} \sigma_z = -\dfrac{\zeta^3}{u^5} \\ \tau_{rz} = -\dfrac{\rho\,\zeta^2}{u^5} \\ \sigma_\theta = \dfrac{1-2\nu}{3}\left[-\dfrac{1}{\rho^2} + \dfrac{\zeta}{\rho^2 u} + \dfrac{\zeta}{u^3}\right] \\ \sigma_r + \sigma_\theta = (1-2\nu)\dfrac{\zeta}{3u^3} - \dfrac{\rho^2\zeta}{u^5} \end{cases}$$

Ces formules ne sont autres que les formules de Boussinesq pour une charge concentrée $P = \frac{2\pi}{3}$, expressions rapportées aux coordonnées réduites ρ et ζ.

D - CALCUL NUMERIQUE

1°) Intervention du coefficient de Poisson

Les applications numériques ont été faites pour la valeur moyenne $\nu = 0{,}25$, applicable à différents matériaux; l'influence relativement faible de ce coefficient sera étudiée au chapitre II § E

Toutefois, le coefficient ν a été pris comme constante en mémoire et peut être changé sans modification des programmes.

2°) Contraintes dans le massif

Les intégrales I_{11} , I_{21} , I_{12} résultent des formules (17), (18) et (21) ($1^{ère}$ carte).

Les intégrales $I_{jj'}$ et $I'_{jj'}$ s'en déduisent par le système de relations linéaires (14) (2ème carte). Seule l'intégrale I_{33} , qui n'intervient pas dans l'expression des composantes de tensions, n'a pas été calculée.

Les composantes des contraintes sont données par les relations (25) ($3^{ème}$ carte).

3°) Contraintes de surface, et contraintes sur l'axe normal :

Résultent directement des formules (26), (27) et (28).

Les fiches d'utilisation des principaux programmes et tableaux numériques des composantes de contraintes sont donnés aux pages suivantes.

0

0 0

Instructions de programme		
1ère carte	2ème carte	3e carte
[illegible]	[illegible]	[illegible]
Ctes :	Ctes :	Cte : 1-2ν en D

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT SPHERIQUE

Composantes des contraintes en coordonnées cylindriques

Cas général : $\rho = \frac{r}{a} \neq 0 \quad \zeta = \frac{z}{a} \neq 0$ Pression au centre $p_o = 1$

OPERATIONS		SORTIE
Lecture 1ère carte		
Sélectionner V		
Composer ρ / ζ	⇒	Mémoire
Lecture 2ème carte		
Sélectionner Y	⇒	Mémoire
Lecture 3ème carte		
Sélectionner V	⇒	Impression σ_r, σ_z, τ_{rz}, σ_θ

Observations : Le programme est en défaut pour $\rho = 0$ ou $\zeta = 0$

Instructions de programme
A V b ↓ 5 C - ↓ A ◊ A A * > * - d ↓ A ◊ c ↑ A - ↑ A ◊ b ↑ B ↓ - c - B ↕ C X B ↓ b - A √ A ◊ C * V C ↕ C - B X c • b ÷ a ↑ d ↕ ÷ D (b ↑
Cte : 1 - 2ν en D

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT SPHERIQUE

Composantes des contraintes en coordonnées cylindriques

Cas particulier : Contraintes de surface à l'intérieur du cercle de charge ($\rho \leq 1$) (1)

OPERATIONS		Sortie
Lecture carte		
Sélectionner V		
Composer ρ	⇒	Impression σ_r σ_z τ_{rz} σ_θ

(1) En dehors du cercle de charge, pour $\rho \geq 1$

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = \frac{1 - 2\nu}{3\rho^2}$$

Instructions de programme
[illegible]

Cte :
$2(1+\nu)$ en D

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT SPHERIQUE

Composantes des contraintes en coordonnées cylindriques

Cas particulier : Contraintes sur l'axe

OPERATIONS		Sortie
Lecture carte		
Sélectionner V.		
Composer ζ	$\Rightarrow$	Impression $\left\| \begin{matrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{matrix} \right.$

PROBLEME DE BOUSSINESQ POUR UN POINCON SPHERIQUE - TABLEAU DES CONTRAINTES

$0 \leq \rho \leq 2.00 \quad 0 \leq \zeta \leq 1.00$

$0 \leq \rho \leq 2.00 \quad 1.00 \leq \zeta \leq 2.00$

ζ	ρ =	0	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
0	σ_r	-0.7500	-0.7323	-0.6768	-0.5741	-0.3958	0.1667	0.1157	0.0850	0.0651	0.0514	0.0417
	σ_z	-1.0000	-0.9798	-0.9165	-0.8000	-0.6000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	τ_{rz}	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	-0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	σ_θ	-0.7500	-0.7374	-0.6980	-0.6259	-0.5042	-0.1667	-0.1157	-0.0850	-0.0651	-0.0514	-0.0417
0.20	σ_r	-0.4259	-0.4118	-0.3693	-0.2994	-0.2156	-0.1649	-0.0888	-0.0322	-0.0075	0.0032	0.0078
	σ_z	-0.9615	-0.9399	-0.8719	-0.7445	-0.5240	-0.1916	-0.0312	-0.0070	-0.0024	-0.0010	-0.0005
	τ_{rz}	0.0000	-0.0375	-0.0786	-0.1275	-0.1838	-0.1733	-0.0666	-0.0250	-0.0116	-0.0062	-0.0037
	σ_θ	-0.4259	-0.4150	-0.3815	-0.3232	-0.2379	-0.1415	-0.0869	-0.0635	-0.0499	-0.0405	-0.0336
0.40	σ_r	-0.2238	-0.2171	-0.1990	-0.1768	-0.1636	-0.1584	-0.1300	-0.0875	-0.0543	-0.0329	-0.0197
	σ_z	-0.8621	-0.8388	-0.7662	-0.6365	-0.4447	-0.2302	-0.0895	-0.0334	-0.0139	-0.0065	-0.0034
	τ_{rz}	0.0000	-0.0596	-0.1196	-0.1763	-0.2117	-0.1887	-0.1193	-0.0648	-0.0357	-0.0209	-0.0130
	σ_θ	-0.2238	-0.2166	-0.1953	-0.1614	-0.1200	-0.0820	-0.0575	-0.0442	-0.0361	-0.0303	-0.0260
0.60	σ_r	-0.1096	-0.1088	-0.1082	-0.1115	-0.1208	-0.1282	-0.1202	-0.0981	-0.0735	-0.0530	-0.0377
	σ_z	-0.7353	-0.7130	-0.6455	-0.5336	-0.3873	-0.2381	-0.1262	-0.0627	-0.0315	-0.0167	-0.0094
	τ_{rz}	0.0000	-0.0643	-0.1243	-0.1721	-0.1936	-0.1771	-0.1334	-0.0889	-0.0569	-0.0368	-0.0243
	σ_θ	-0.1096	-0.1057	-0.0948	-0.0786	-0.0607	-0.0454	-0.0350	-0.0287	-0.0247	-0.0217	-0.0193
0.80	σ_r	-0.0491	-0.0513	-0.0584	-0.0707	-0.0860	-0.0977	-0.0992	-0.0900	-0.0752	-0.0600	-0.0467
	σ_z	-0.6098	-0.5908	-0.5350	-0.4472	-0.3393	-0.2313	-0.1436	-0.0843	-0.0488	-0.0286	-0.0173
	τ_{rz}	0.0000	-0.0585	-0.1107	-0.1491	-0.1655	-0.1566	-0.1294	-0.0972	-0.0694	-0.0487	-0.0343
	σ_θ	-0.0491	-0.0473	-0.0426	-0.0360	-0.0291	-0.0234	-0.0197	-0.0174	-0.0159	-0.0148	-0.0137
1.00	σ_r	-0.0183	-0.0214	-0.0304	-0.0441	-0.0596	-0.0721	-0.0779	-0.0761	-0.0687	-0.0590	-0.0490
	σ_z	-0.5000	-0.4852	-0.4421	-0.3762	-0.2970	-0.2173	-0.1488	-0.0973	-0.0622	-0.0397	-0.0256
	τ_{rz}	0.0000	-0.0490	-0.0920	-0.1229	-0.1373	-0.1343	-0.1180	-0.0959	-0.0740	-0.0557	-0.0415
	τ_θ	-0.0183	-0.0176	-0.0160	-0.0139	-0.0118	-0.0104	-0.0096	-0.0094	-0.0094	-0.0094	-0.0093

PROBLEME DE BOUSSINESQ POUR UN POINCON SPHERIQUE - TABLEAU DES CONTRAINTES

$0 \leq \rho \leq 2.00 \qquad 0 \leq \zeta \leq 1.00$

$0 \leq \rho \leq 2.00 \qquad 1.00 \leq \zeta \leq 2.00$

ζ	ρ =	0	0.20	0.40	0.60	0.80	1.00	1.20	1.40	1.60	1.80	2.00
1.00	σ_r	-0.0183	-0.0214	-0.0304	-0.0441	-0.0596	-0.0721	-0.0779	-0.0761	-0.0687	-0.0590	-0.0490
	σ_z	-0.5000	-0.4852	-0.4421	-0.3762	-0.2970	-0.2173	-0.1488	-0.0973	-0.0622	-0.0397	-0.0256
	τ_{rz}	0.0000	-0.0490	-0.0920	-0.1229	-0.1373	-0.1343	-0.1180	-0.0959	-0.0740	-0.0557	-0.0415
	σ_θ	-0.0183	-0.0176	-0.0160	-0.0139	-0.0118	-0.0104	-0.0096	-0.0094	-0.0094	-0.0094	-0.0093
1.20	σ_r	-0.0030	-0.0060	-0.0144	-0.0268	-0.0404	-0.0523	-0.0597	-0.0617	-0.0592	-0.0538	-0.0472
	σ_z	-0.4098	-0.3987	-0.3666	-0.3180	-0.2597	-0.2001	-0.1465	-0.1032	-0.0711	-0.0485	-0.0331
	τ_{rz}	0.0000	-0.0395	-0.0740	-0.0993	-0.1125	-0.1133	-0.1042	-0.0895	-0.0733	-0.0583	-0.0456
	σ_θ	-0.0030	-0.0028	-0.0026	-0.0024	-0.0024	-0.0027	-0.0033	-0.0040	-0.0048	-0.0054	-0.0058
1.40	σ_r	0.0044	0.0018	-0.0052	0.0155	-0.0270	-0.0374	-0.0450	-0.0489	-0.0493	-0.0470	-0.0431
	σ_z	-0.3378	-0.3296	-0.3060	-0.2702	-0.2271	-0.1821	-0.1401	-0.1044	-0.0760	-0.0547	-0.0392
	τ_{rz}	0.0000	-0.0313	-0.0589	-0.0797	-0.0917	-0.0948	-0.0904	-0.0811	-0.0695	-0.0578	-0.0471
	σ_θ	0.0044	0.0043	0.0040	0.0035	0.0027	0.0018	+0.0006	-0.0005	-0.0016	-0.0025	-0.0032
1.60	σ_r	0.0076	0.0057	0.0000	-0.0082	-0.0176	-0.0265	-0.0336	-0.0382	-0.0402	-0.0399	-0.0380
	σ_z	-0.2809	-0.2748	-0.2575	-0.2311	-0.1988	-0.1646	-0.1316	-0.1023	-0.0778	-0.0585	-0.0436
	τ_{rz}	0.0000	-0.0248	-0.0469	-0.0640	-0.0748	-0.0791	-0.0776	-0.0721	-0.0641	-0.0553	-0.0466
	σ_θ	0.0076	0.0075	0.0071	0.0064	0.0054	0.0042	+0.0030	0.0018	0.0006	-0.0004	-0.0013
1.80	σ_r	0.0089	0.0074	0.0029	-0.0036	-0.0111	-0.0186	-0.0250	-0.0296	-0.0324	-0.0333	-0.0328
	σ_z	-0.2358	-0.2314	-0.2185	-0.1988	-0.1745	-0.1482	-0.1222	-0.0982	-0.0775	-0.0602	-0.0465
	τ_{rz}	0.0000	-0.0197	-0.0374	-0.0516	-0.0612	-0.0660	-0.0664	-0.0634	-0.0581	-0.0517	-0.0449
	σ_θ	0.0089	0.0087	0.0083	0.0076	0.0066	0.0055	0.0043	0.0032	0.0020	0.0010	0.0002
2.00	σ_r	0.0091	0.0079	0.0045	-0.0006	-0.0067	-0.0129	-0.0184	-0.0228	-0.0258	-0.0275	-0.0279
	σ_z	-0.2000	-0.1967	-0.1871	-0.1722	-0.1537	-0.1333	-0.1126	-0.0931	-0.0756	-0.0605	-0.0480
	τ_{rz}	0.0000	-0.0158	-0.0301	-0.0419	-0.0504	-0.0552	-0.0567	-0.0554	-0.0521	-0.0475	-0.0424
	σ_θ	0.0091	0.0090	0.0086	0.0079	0.0071	0.0061	0.0050	0.0040	0.0029	0.0020	0.0012

PROBLEME DE BOUSSINESQ POUR UN POINCON SPHERIQUE - TABLEAU DES CONTRAINTES

$0 \leq \rho \leq 5.00 \qquad 0 \leq \zeta \leq 2.50$

$0 \leq \rho \leq 5.00 \qquad 2.50 \leq \zeta \leq 5.00$

ζ	ρ =	0	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
0	σ_r	-0.7500	-0.6324	0.1667	0.0741	0.0417	0.0267	0.0186	0.0136	0.0104	0.0082	0.0067
	σ_z	-1.0000	-0.8660	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	τ_{rz}	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	σ_θ	-0.7500	-0.6667	-0.1667	-0.0741	-0.0417	-0.0267	-0.0186	-0.0136	-0.0104	-0.0082	-0.0067
0.50	σ_r	-0.1580	-0.1426	-0.1441	-0.0807	-0.0299	-0.0106	-0.0032	-0.0001	0.0013	0.0018	0.0020
	σ_z	-0.8000	-0.6509	-0.2366	-0.0327	-0.0061	-0.0017	-0.0006	-0.0003	-0.0001	-0.0001	-0.0001
	τ_{rz}	0.0000	-0.1536	-0.1848	-0.0611	-0.0186	-0.0073	-0.0034	-0.0018	-0.0010	-0.006	-0.0004
	σ_θ	-0.1580	-0.1259	-0.0614	-0.0327	-0.0225	-0.0165	-0.0125	-0.0098	-0.0079	-0.0064	-0.0053
1.00	σ_r	-0.0183	-0.0368	-0.0721	-0.0729	-0.0490	-0.0291	-0.0170	-0.0101	-0.0060	-0.0036	-0.0021
	σ_z	-0.5000	-0.4115	-0.2173	-0.0779	-0.0256	-0.0094	-0.0040	-0.0019	-0.0010	-0.0005	-0.0003
	τ_{rz}	0.0000	-0.1093	-0.1343	-0.0846	-0.0415	-0.0203	-0.0107	-0.0060	-0.0036	-0.0023	-0.0015
	σ_θ	-0.0183	-0.0149	-0.0104	-0.0094	-0.0093	-0.0085	-0.0075	-0.0065	-0.0055	-0.0047	-0.0041
1.50	σ_r	0.0063	-0.0066	-0.0315	-0.0443	-0.0406	-0.0308	-0.0218	-0.0151	-0.0104	-0.0073	-0.0051
	σ_z	-0.3077	-0.2661	-0.1732	-0.0897	-0.0416	-0.0192	-0.0093	-0.0048	-0.0027	-0.0015	-0.0010
	τ_{rz}	0.0000	-0.0628	-0.0866	-0.0719	-0.0471	-0.0284	-0.0170	-0.0105	-0.0067	-0.0044	-0.0030
	σ_θ	0.0063	-0.0056	-0.0032	0.0002	-0.0022	-0.0034	-0.0038	-0.0038	-0.0036	-0.0033	-0.0030
2.00	σ_r	0.0091	0.0018	-0.0129	-0.0246	-0.0279	-0.0254	-0.0207	-0.0161	-0.0122	-0.0092	-0.0070
	σ_z	-0.2000	-0.1802	-0.1333	-0.0841	-0.0480	-0.0264	-0.0146	-0.0083	-0.0049	-0.0030	-0.0019
	τ_{rz}	0.0000	-0.0363	-0.0552	-0.0539	-0.0424	-0.0299	-0.0203	-0.0137	-0.0093	-0.0065	-0.0046
	σ_θ	0.0091	0.0087	0.0061	0.0035	0.0012	-0.0005	-0.0014	-0.0019	-0.0021	-0.0021	-0.0021
2.50	σ_r	0.0080	0.0041	-0.0046	-0.0131	-0.0179	-0.0188	-0.0173	-0.0147	-0.0121	-0.0098	-0.0078
	σ_z	-0.1379	-0.1278	-0.1026	-0.0731	-0.0478	-0.0299	-0.0184	-0.0114	-0.0072	-0.0046	-0.0030
	τ_{rz}	0.0000	-0.0221	-0.0360	-0.0391	-0.0347	-0.0276	-0.0207	-0.0151	-0.0109	-0.0080	-0.0059
	σ_θ	0.0080	0.0076	0.0061	0.0042	0.0025	0.0011	0.0001	-0.0006	-0.0010	-0.0012	-0.0013

PROBLEME DE BOUSSINESQ POUR UN POINCON SPHERIQUE - TABLEAU DES CONTRAINTES

$0 \leq \rho \leq 5.00 \qquad 0 \leq \zeta \leq 2.50$

$0 < \rho \leq 5.00 \qquad 2.50 \leq \zeta \leq 5.00$

ζ	ρ =	0	0.50	1.00	1.50	2.00	2.50	3.00	3.50	4.00	4.50	5.00
2.50	σ_r	0.0080	0.0041	-0.0046	-0.0131	-0.0179	-0.0188	-0.0173	-0.0147	-0.0121	-0.0098	-0.0078
	σ_z	-0.1379	-0.1278	-0.1026	-0.0731	-0.0478	-0.0299	-0.0184	-0.0114	-0.0072	-0.0046	-0.0030
	τ_{rz}	0.0000	-0.0221	-0.0360	-0.0391	-0.0347	-0.0276	-0.0207	-0.0151	-0.0109	-0.0080	-0.0059
	σ_θ	0.0080	0.0076	0.0061	0.0042	0.0025	0.0011	0.0001	-0.0006	-0.0010	-0.0012	-0.0013
3.00	σ_r	0.0065	0.0042	-0.0009	-0.0068	-0.0111	-0.0132	-0.0134	-0.0124	-0.0110	-0.0094	-0.0079
	σ_z	-0.1000	-0.0945	-0.0800	-0.0618	-0.0444	-0.0305	-0.0204	-0.0136	-0.0091	-0.0061	-0.0042
	τ_{rz}	0.0000	-0.0142	-0.0242	-0.0283	-0.0275	-0.0238	-0.0193	-0.0151	-0.0116	-0.0089	-0.0068
	σ_θ	0.0065	0.0064	0.0054	0.0041	0.0029	0.0017	0.0009	0.0002	-0.0002	-0.0006	-0.0007
3.50	σ_r	0.0053	0.0040	0.0007	0.0033	-0.0069	-0.0091	-0.0100	-0.0100	-0.0094	-0.0085	-0.0074
	σ_z	-0.0755	-0.0722	-0.0635	-0.0519	-0.0399	-0.0294	-0.0210	-0.0149	-0.0105	-0.0074	-0.0053
	τ_{rz}	0.0000	-0.0096	-0.0169	-0.0208	-0.0214	-0.0199	-0.0172	-0.0143	-0.0115	-0.0092	-0.0073
	σ_θ	0.0053	0.0051	0.0045	0.0037	0.0028	0.0020	0.0013	0.0007	0.0003	-0.0001	-0.0003
4.00	σ_r	0.0042	0.0034	0.0013	-0.0015	-0.0041	-0.0061	-0.0073	-0.0078	-0.0077	-0.0073	-0.0067
	σ_z	-0.0588	-0.0568	-0.0513	-0.0436	-0.0352	-0.0274	-0.0207	-0.0154	-0.0113	-0.0083	-0.0061
	τ_{rz}	0.0000	-0.0067	-0.0121	-0.0155	-0.0168	-0.0163	-0.0149	-0.0129	-0.0110	-0.0091	-0.0074
	σ_θ	0.0042	0.0042	0.0038	0.0033	0.0027	0.0020	0.0014	0.0010	0.0006	0.0003	0.0000
4.50	σ_r	0.0035	0.0030	0.0015	-0.0004	-0.0024	-0.0041	-0.0053	-0.0060	-0.0062	-0.0061	-0.0058
	σ_z	-0.0471	-0.0458	-0.0421	-0.0369	-0.0309	-0.0250	-0.0197	-0.0153	-0.0117	-0.0089	-0.0068
	τ_{rz}	0.0000	-0.0048	-0.0089	-0.0118	-0.0132	-0.0134	-0.0127	-0.0115	-0.0101	-0.0087	-0.0073
	σ_θ	0.0035	0.0035	0.0032	0.0028	0.0024	0.0019	0.0015	0.0011	0.0008	0.0005	0.0002
5.00	σ_r	0.0029	0.0025	0.0016	0.0002	-0.0013	-0.0027	-0.0038	-0.0046	-0.0050	-0.0051	-0.0050
	σ_z	-0.0385	-0.0376	-0.0351	-0.0314	-0.0271	-0.0227	-0.0185	-0.0148	-0.0117	-0.0092	-0.0072
	τ_{rz}	0.0000	-0.0036	-0.0067	-0.0091	-0.0105	-0.0110	-0.0108	-0.101	-0.0091	-0.0081	-0.0070
	σ_θ	0.0029	0.0030	0.0027	0.0025	0.0021	0.0018	0.0015	0.0012	0.0009	0.0006	0.0004

CHAPITRE II - ETUDE DE LA DISTRIBUTION DES TENSIONS ET PROBLEMES ANNEXES

A/ - DIAGRAMMES DE CONTRAINTES ($\gamma = 0,25$)

1°) Référence aux planches et dessins

Les diagrammes figuratifs de la distribution des contraintes dans le milieu élastique sont donnés aux planches I à XII. Ces diagrammes ont été obtenus par interpolation des résultats ponctuels du chapitre I, soit à partir des points déjà calculés numériquement et présentés ci-dessus, soit, le plus souvent, et particulièrement au voisinage de la surface, par le calcul des points intermédiaires nécessités par la précision graphique.

La direction et le signe des contraintes principales, ainsi que la variation de la contrainte principale orthoradiale sont figurés sur les planches I à IV (diagrammes généraux), V et VI (diagrammes de détail au voisinage du bord du contact).

Planche I : lignes isostatiques ($0 < \rho < 5$)
" II : " " ($0 < \rho < 2$), avec indication du signe des contraintes principales.
" III : variation de la contrainte orthoradiale ($0 < \rho < 5$)
" IV " " " " " ($0 < \rho < 2$)
" V : lignes isostatiques au voisinage du bord du cercle de charge.
" VI : variation de la contrainte orthoradiale au voisinage du bord du cercle de charge.

Pour l'examen de la variation des contraintes, il sera également fait référence aux planches VII à XII relatives aux critères de sécurité et figurant notamment le cisaillement maximal et la contrainte principale de traction.

2°) Observations concernant la distribution des contraintes

a) Généralités

Le diagramme de charge normale en surface a la forme d'un

demi-ellipsoïde de révolution, d'où une ligne singulière au bord du cercle de charge, à travers laquelle la pression passe d'un gradient infini à une valeur nulle.

Cette singularité n'existe mathématiquement qu'en surface, mais, par continuité, on doit observer en son voisinage, à l'intérieur du milieu élastique, une singularité approchée, physique, caractérisée par des gradients de contraintes localement élevés. Intuitivement, et conformément au principe de SAINT-VENANT , cette singularité physique doit disparaître en profondeur, l'état de contraintes tendant asymptotiquement, pour un point éloigné du contact, vers l'état de contraintes de BOUSSINESQ relatif à une charge concentrée unique.

L'observation des diagrammmes précités est qualitativement conforme à ces prévisions et montre en outre :

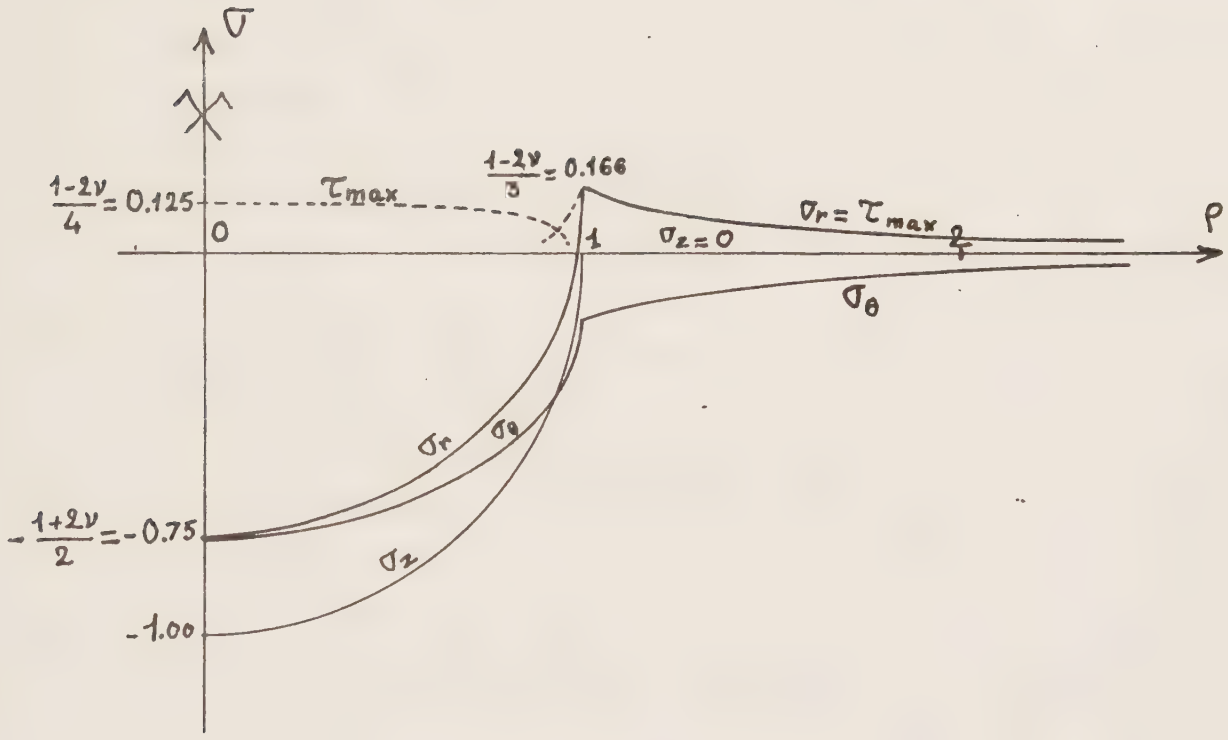
- que la perturbation apportée par la ligne singulière n'intéresse qu'un domaine extrêmement réduit en son voisinage ;
- qu'en dehors de cette singularité locale, la distribution des contraintes est remarquablement progressive et régulière, les valeurs extrêmales correspondant à des points situés en surface et sur l'axe de révolution.

b) Contraintes de surface

Le diagramme des contraintes principales de surface est donné ci-après. Il appelle les remarques suivantes :

- les trois diagrammes de σ_z , σ_r , σ_θ présentent un point anguleux pour $\rho = 1$, à tangente verticale par valeurs inférieures.
- pour $\rho > 1$ (cf. I , C , 2°) l'état de contraintes est de cisaillement simple : $\sigma_r = - \sigma_\theta$, $\sigma_z = 0$.
- la contrainte orthoradiale σ_θ est constamment négative (compression) avec extremum sur l'axe égal à $-\frac{1 + 2\nu}{2}$
- la contrainte radiale σ_r est constamment positive et décroissante pour $\rho > 1$; pour $\rho < 1$, elle présente un changement de signe avec minimum sur l'axe : $\sigma_r = - \frac{1 + 2\nu}{2}$, maximum pour $\rho = 1$: $\sigma_r = \frac{1 - 2\nu}{3}$. La courbe étant très redressée au voisinage de $\rho = 1$, le changement de signe se produit pour une valeur très voisine de 1 : $\rho \# 0{,}98$; la surface de charge est donc presque entièrement en compression radiale à

l'exception d'une couronne étroite le long du cercle limite de contact.



c) Distribution des contraintes à l'intérieur du milieu élastique.

Direction des contraintes principales.

Du fait de la symétrie de révolution, la contrainte orthoradiale σ_θ est principale. Les lignes isostatiques enveloppes des deux autres contraintes principales sont situées dans des plans méridiens et représentent la trace de surfaces isostatiques de révolution.

Des lignes isostatiques, présentées aux planches I et II, nous désignerons par :

1ère famille : les lignes descendantes issues de la surface limite.

2ème famille : le réseau orthogonal.

Les lignes de la 1ère famille sont à leur origine normales à la surface limite, avec rayon de courbure infini ; elles s'incurvent pour présenter ensuite une portion pratiquement rectiligne (sur une longueur supérieure à 5 fois le rayon du cercle de contact) et s'infléchir à grande distance selon une branche parabolique dans la direction O_z.

Il y a lieu de distinguer les lignes issues de la surface chargée qui sont constamment divergentes, et les lignes issues de la surface non chargée qui sont convergentes au-dessus de la zone pseudo-rectiligne d'inflexion, et divergentes ensuite dans leur portion parabolique.

Les lignes de la 2ème famille, concaves vers le bas sous la surface de charge, s'infléchissent au delà pour tendre asymptotiquement vers la surface. Les lignes de cette famille rencontrant l'axe à une profondeur inférieure à 1,5 environ, sont constamment convergentes pour les valeurs croissantes de ρ . Celles situées à plus grande profondeur sont très légèrement divergentes jusqu'au point d'inflexion, convergent ensuite.

Signe des contraintes principales (Pl. II; cf. également pl. XIII partie gauche).

La contrainte orthoradiale est négative en surface, positive en profondeur (traction de très faible intensité par rapport à la contrainte principale de compression). La courbe limite $\sigma_\theta = 0$ est d'allure hyperbolique avec asymptotes passant par le centre de la charge.

Les isostatiques de la 1ère famille (issues de la surface) correspondent toujours à une contrainte de compression.

Les isostatiques de la 2ème famille correspondent à une contrainte de traction sauf à l'intérieur d'un bulbe situé sous la surface chargée.

Ce bulbe, tangent selon l'axe à la courbe $\sigma_\theta = 0$, limite ainsi un domaine en compression triaxiale.

Variation des contraintes principales

La variation de la contrainte orthoradiale est figurée par les courbes $\sigma_\theta = C^{te}$ (Pl. III et IV). On remarque la décroissance très rapide de la compression sous la charge, et la zone faiblement tendue au-dessous de la courbe limite.

La variation des contraintes principales dans un plan méridien est obtenue soit par valeurs numériques, soit en considérant la convergence des isostatiques et la valeur relative des 3 contraintes principales (généralisation à 3 dimensions d'une méthode d'élasticité plane ; cette méthode donne rigoureusement le sens de la variation si les effets des contraintes latérales s'ajoutent, qualitativement si l'un d'eux est visiblement prépondérant).

Cette étude conduit aux résultats suivants:

Isostatiques de la première famille (par valeurs croissantes de ζ)

- Isostatiques issues de la surface chargée:

  contrainte de compression décroissante et tendant vers 0

- Isostatiques issues de la surface non chargée:

  compression croissant de 0 à un maximum (situé entre la surface et le point d'inflexion), tendant ensuite vers 0

Isostatiques de la deuxième famille (par valeurs croissantes de ρ)

- Isostatiques traversant le bulbe limite:

  compression décroissant jusqu'à 0 à la traversée du bulbe limite, puis traction passant, selon le cas, par un ou deux maxima, pour tendre ensuite vers 0 (pour la partie tendue, cf Pl XII le diagramme de la contrainte principale de traction)

- Isostatiques situées au dessous du bulbe limite:

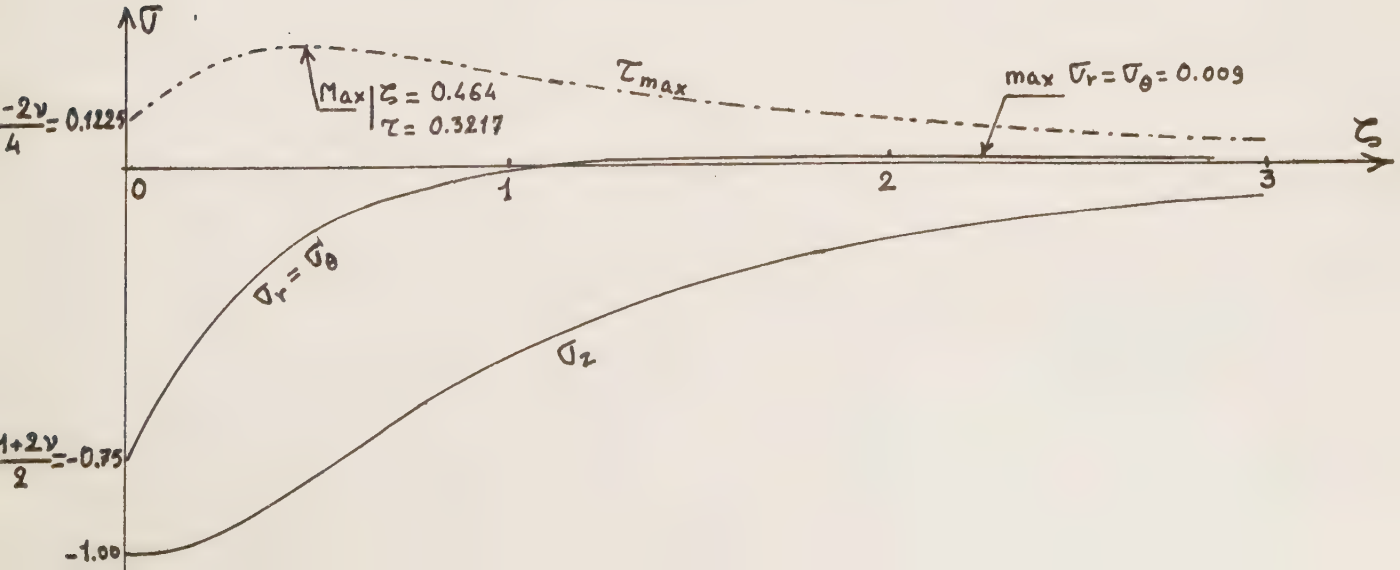
  traction décroissant d'abord à partir du maximum sur l'axe, puis variation analogue au cas précédent (cf Pl XII)

Valeurs extrêmales, contraintes sur l'axe

Les extremums intermédiaires signalés le long des isostatiques correspondent à des points relativement éloignés de la surface de charge et des contraintes trés faibles devant les contraintes maximales de surface.

Seules les valeurs extrêmales correspondant aux points en surface (diagramme p.30 ci-dessus),et sur l'axe, présentent a priori un intérêt pratique.(Ces lieux correspondent également à l'extrêmum des critères de sécurité qui sera examiné § IIB ci-après.)

d) Diagramme des contraintes sur l'axe:



e) Contraintes au voisinage de la ligne singulière:

Les planches V et VI figurent les lignes isostatiques et les courbes $\sigma_\theta = C^{te}$ au voisinage de la ligne singulière.

On constate que la ligne isostatique issue du bord du contact ne présente pas de singularité en ce point: elle reste normale à la surface avec rayon de courbure infini, mais le méplat est minimum par rapport aux lignes voisines de la $1^{ère}$ famille dont la disposition est différente de part et d'autre: réseau divergent à l'origine pour $\rho<1$, convergent pour $\rho \geq 1$. (Ce résultat est en accord avec le fait que, pour une contrainte horizontale σ_r majeure, la contrainte verticale σ_z est fonction décroissante de z pour $\rho<1$, croissante pour $\rho \geq 1$.)

En ce qui concerne les lignes $\sigma_\theta = C^{te}$, (Pl VI) la ligne particulière $\sigma_\theta = \frac{1-2\nu}{3}$ passant par le bord du contact est tangente à la surface limite, les lignes voisine s'écartant trés rapidement de cette disposition.

L'étude des critères-limite: cisaillement maximum, contrainte principale de traction, qui sera faite au paragraphe suivant, fera également apparaître une variation rapide mais continue des contraintes au voisinage du bord du contact, la singularité proprement dite ne se produisant qu'en surface, et ne donnant pas lieu à une incompatibilité des déformations.

o

o o

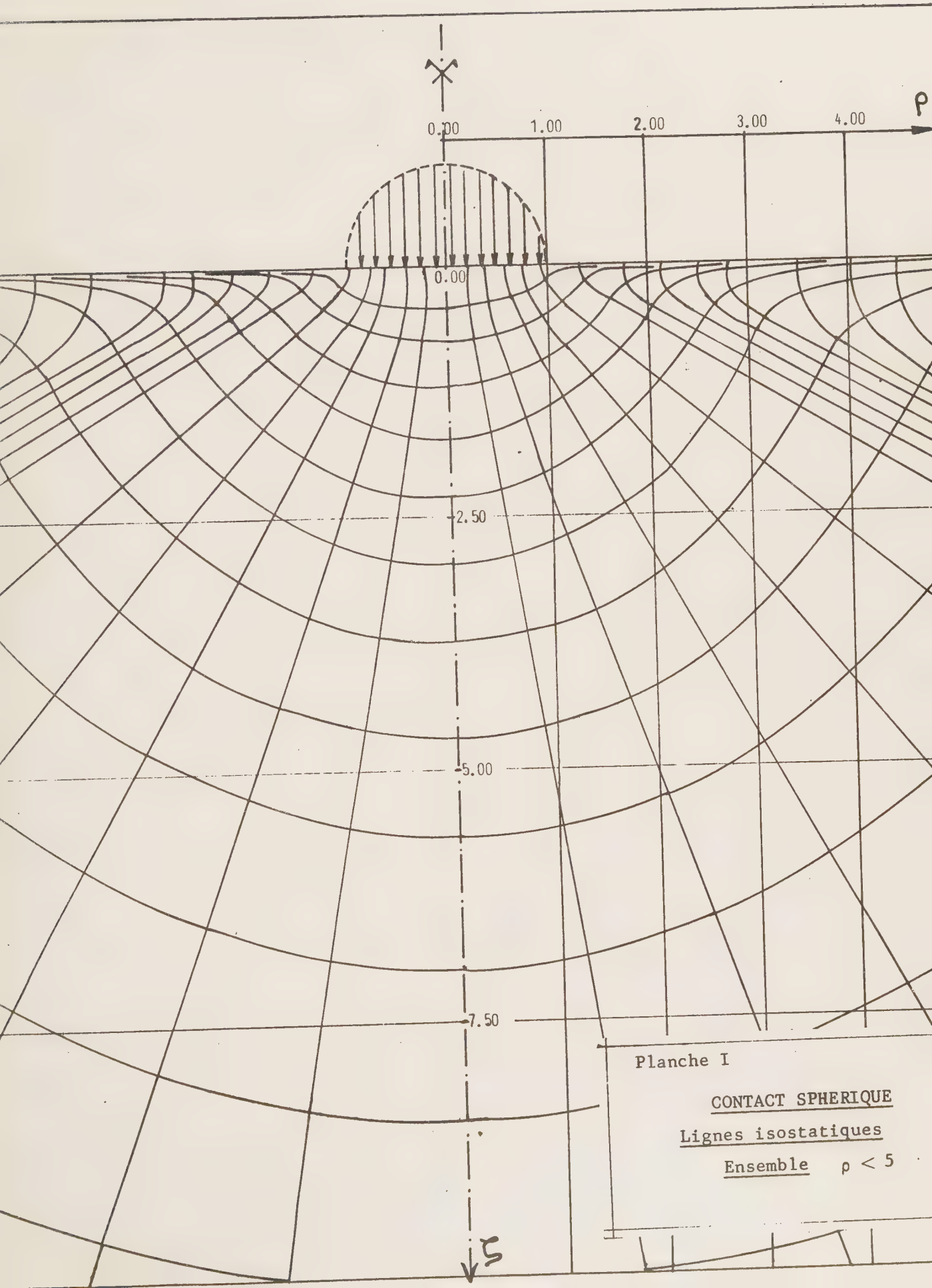


Planche I

CONTACT SPHERIQUE

Lignes isostatiques

Ensemble $\rho < 5$

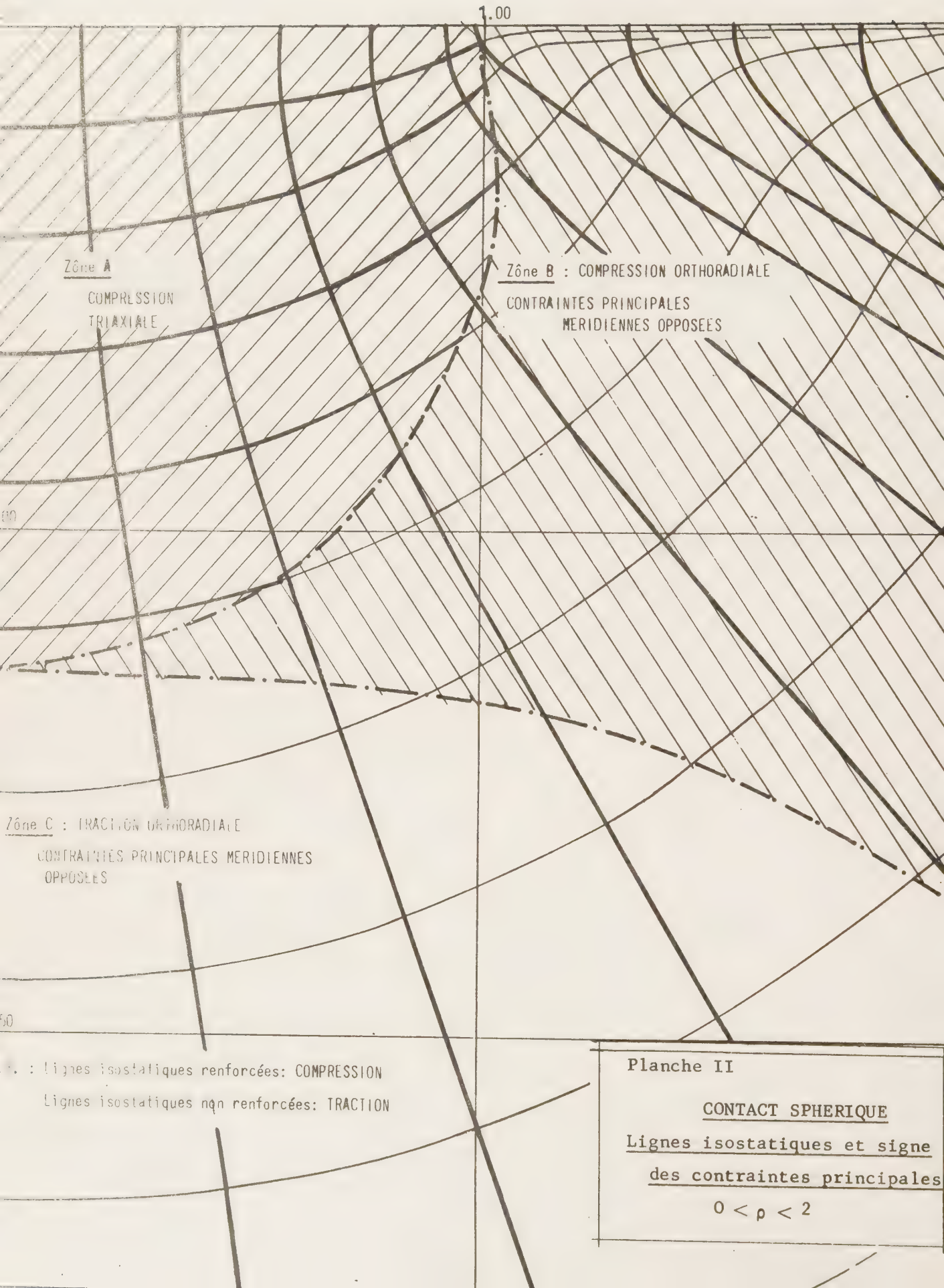


Planche II

CONTACT SPHERIQUE

Lignes isostatiques et signe des contraintes principales

$0 < \rho < 2$

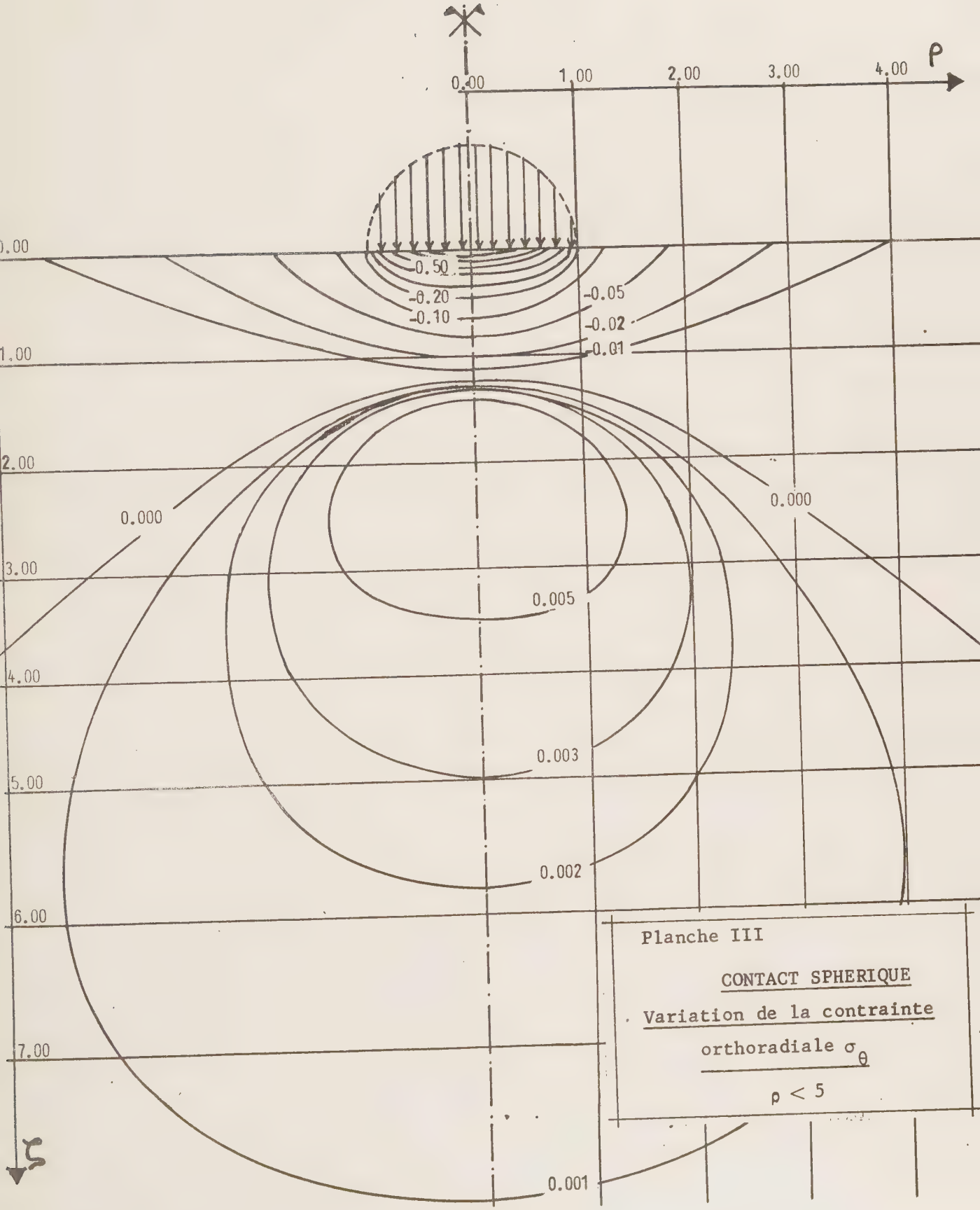


Planche III

CONTACT SPHERIQUE

Variation de la contrainte orthoradiale σ_θ

$\rho < 5$

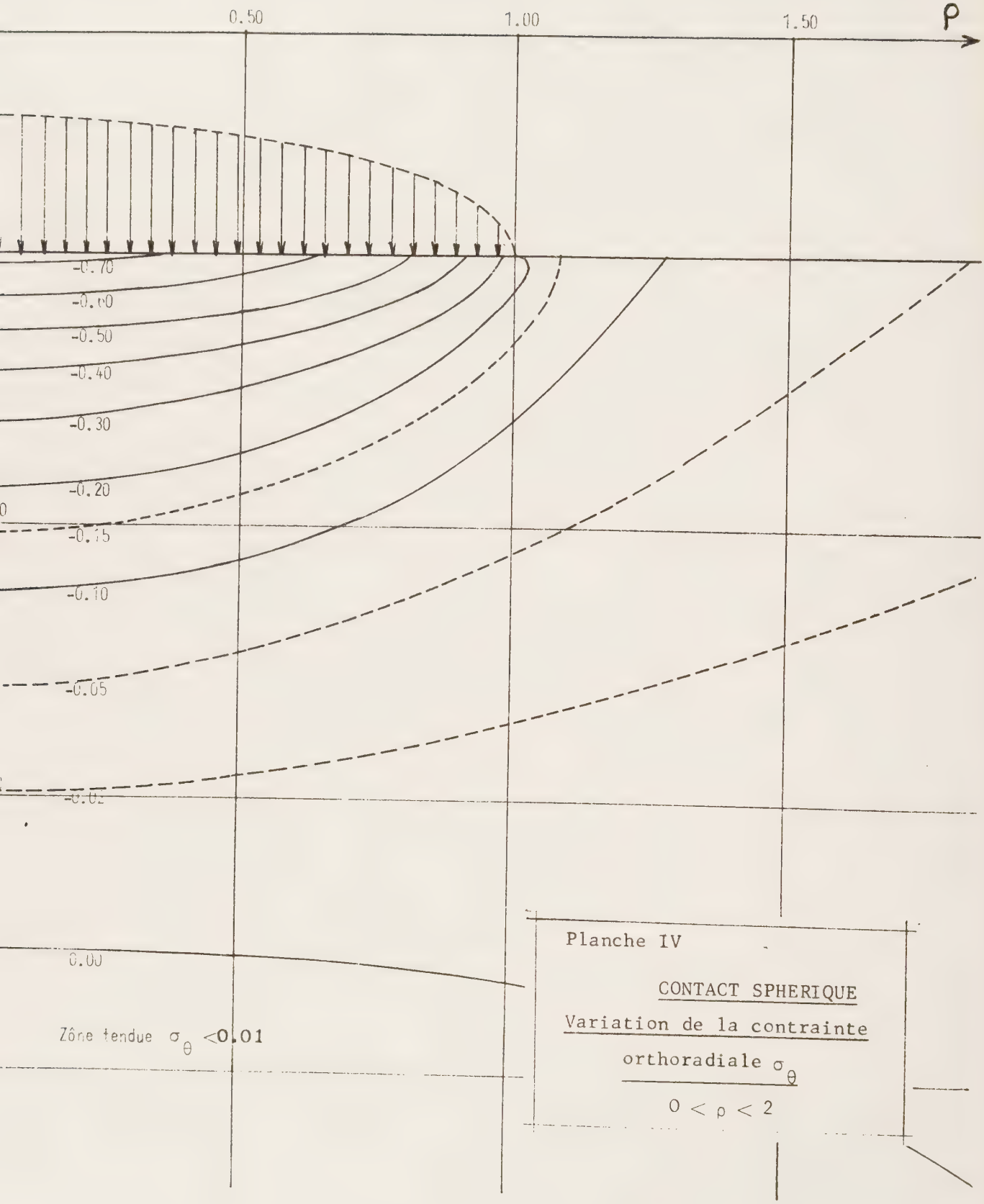


Planche IV

CONTACT SPHERIQUE

Variation de la contrainte orthoradiale σ_θ

$0 < \rho < 2$

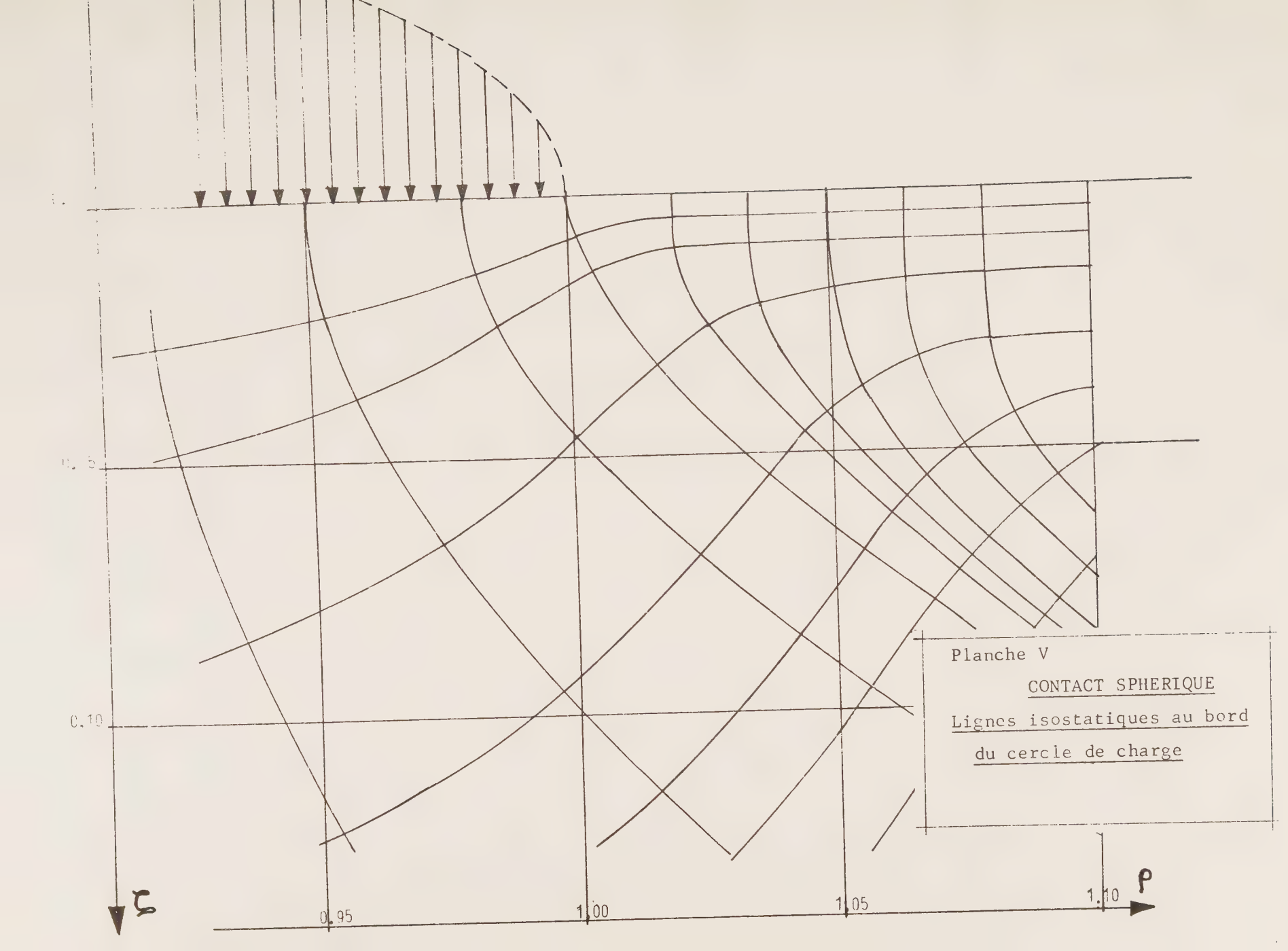


Planche V

CONTACT SPHERIQUE

Lignes isostatiques au bord du cercle de charge

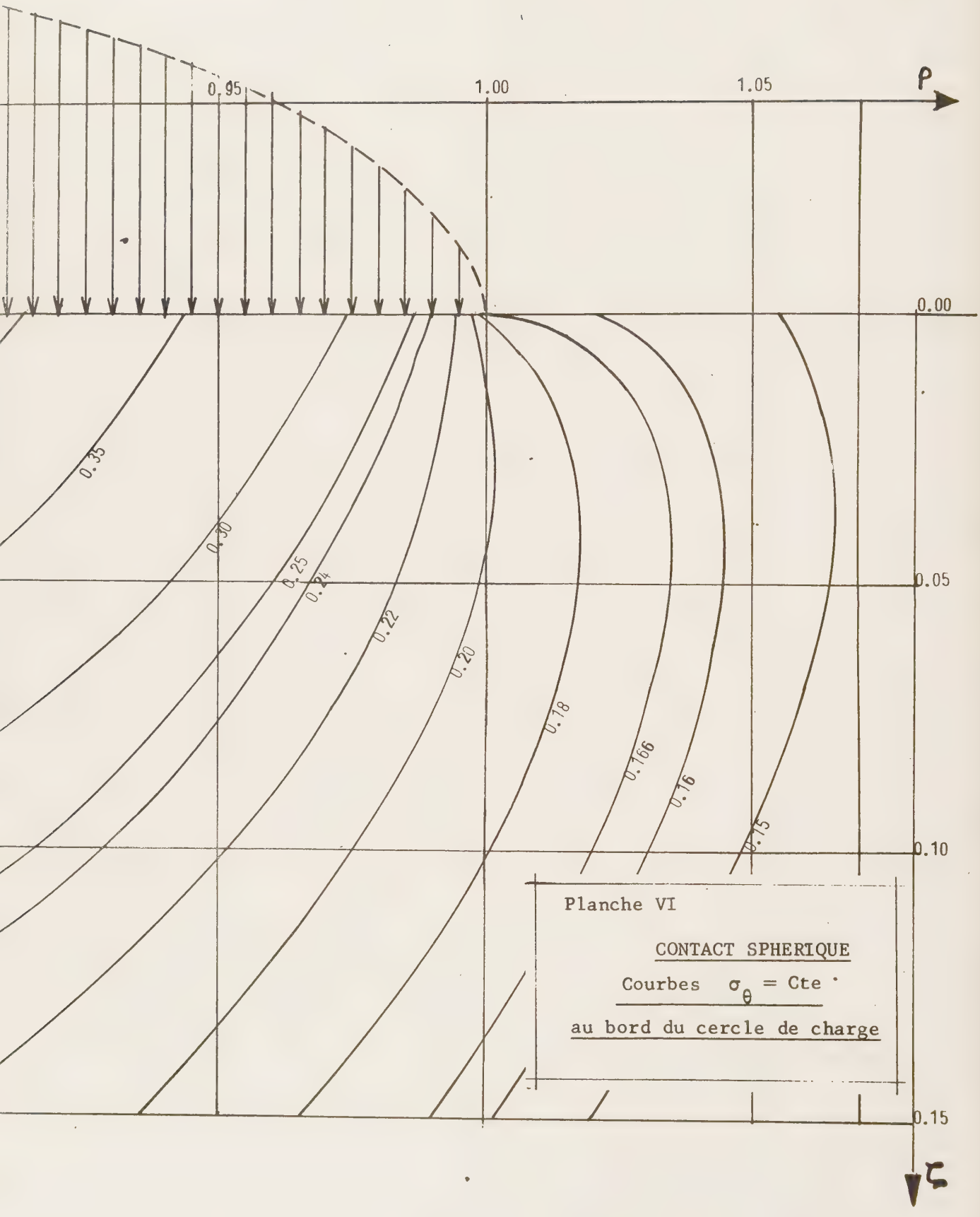


Planche VI

CONTACT SPHERIQUE

Courbes σ_θ = Cte

au bord du cercle de charge

B/ - CRITERES DE SECURITE

Seuls seront envisagés ici, en vue d'examiner qualitativement les points ou zônes les plus sollicités, les critères les plus couramment utilisés comme limite de l'état élastique. Il ne s'agit donc pas , sauf dans le cas de matériaux fragiles en traction, de sécurité à la rupture, et il est bien entendu que pour apprécier la sécurité réelle dans un problème pratique défini, il y aurait lieu de tenir compte des caractéristiques exactes du matériau, des conditions d'emploi, de l'approximation du critère, de l'incidence sur la sécurité d'une plastification éventuelle...etc., éléments qui ne seront évoqués ici qu'à titre d'exemples.

1°) Référence aux planches et dessins

Cf Pl VII Courbes d'égal cisaillement maximal $(0 < \rho < 5)$

Pl VIII Courbes d'égal cisaillement maximal $(0 < \rho < 2)$

IX Comparaison des critères de VON MISES et de TRESCA

X Cisaillement maximal au voisinage du bord du cercle de charge

XI Critère de VON MISES au voisinage du bord du cercle de charge

XII Contrainte principale de traction

2°) Cisaillement maximal

a) Sécurité en phase élastique

Pour les matériaux susceptibles du critère de TRESCA, les courbes d'égal cisaillement maximal (Pl VII) indiquent bien que les sollicitations extrêmales ont lieu exclusivement sur l'axe, le point le plus périclité étant situé au dessous de la surface (cf § IIE: Influence du coefficient de POISSON).

Une petite zône à cisaillement élevé (mais d'intensité maximale sensiblement deux fois plus faible que le maximum sur l'axe) existe également sous le bord du cercle de charge (Pl VIII et X), sollicitations localisées et superficielles qui décroissent rapidement avec la profondeur.

Le lieu des points anguleux des courbes d'égal cisaillement

est une courbe d'égales contraintes principales, au passage de laquelle le cisaillement maximal change de détermination: au dessus de cette courbe la contrainte orthoradiale σ_θ est extrême; au dessous, elle est intermédiaire.

b) Plastification partielle

Les courbes de cisaillement maximal en phase élastique permettent également d'aborder de façon approchée le problème de plastification partielle sous l'action du poinçon sphérique.

On peut en effet supposer que, pour un léger dépassement du critère, la plastification se développe dans la zône hypercritique donnée par le calcul élastique, jusqu'à un contour voisin du contour de celle-ci. C'est admettre que la déformation de la zône plastifiée a une incidence relativement faible sur l'état de contraintes du domaine élastique extérieur, hypothèse d'autant plus approchée que le dépassement initial est important.

Dans cette hypothèse, les courbes de cisaillement maximal par valeurs décroissantes donnent une image du développement de la plastification sous le poinçon selon la loi de TRESCA.

Cet aperçu du processus de plastification donne lieu à différentes remarques qualitatives concernant les essais de dureté "à la bille":

Essai de dureté Hertzienne

Cet essai définit la dureté hertzienne lors de la première déformation plastique mesurable, caractérisée par une rupture de pente assez nette de la courbe Force-Pénétration.

Soit P_c la charge critique théorique, a_c p_{oc} ϵ_c τ_c les paramètres correspondants, le cisaillement maximum sur l'axe τ_c étant ici égal au critère.

En début de plastification, $P > P_c$, le travail $P.(u_z)_0$ du poinçon, d'où la pénétration ϵ, ne diffèrent du problème purement élastique que par le travail dissipé dans la zône plastifiée. Si nous admettons que le travail unitaire de dissipation dans cette zône est une fonction croissante du dépassement du critère, l'influence du début de plastification sur la pénétration sera proportionnelle au volume plastifié affecté d'un exposant au moins égal à 1.

D'autre part, on déduit aisément de la disposition concentrique

des courbes d'égal cisaillement et de la forme parabolique du maximum de cisaillement sur l'axe que le volume du domaine hypercritique a pour expression, au voisinage du point de cisaillement maximum:

$$V = a^3(\tau-\tau_c)^{3/2}.C^{te} = a^3(p_o-p_{oc})^{3/2}.C^{te}$$

Pour un poinçon de rayon donné R, a et p_o varient comme $\epsilon^{1/2}$, d'où

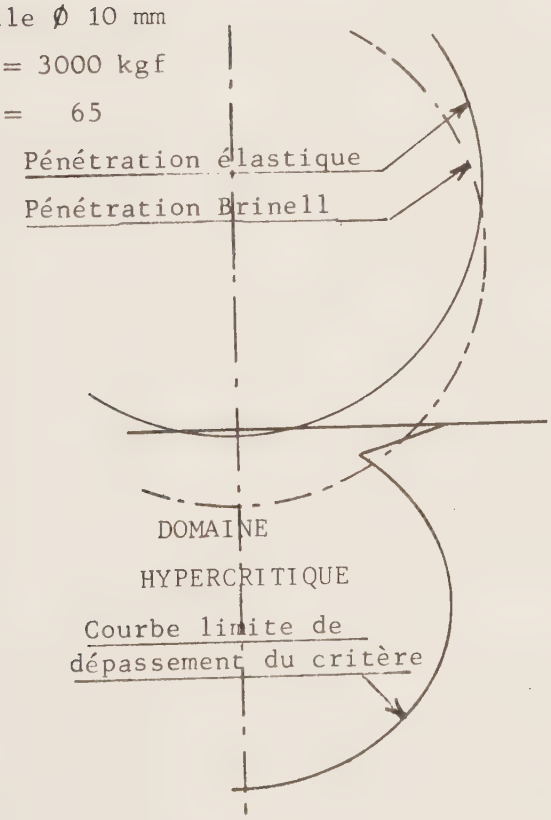
$$V = \epsilon^{3/2}(\sqrt{\epsilon}-\sqrt{\epsilon_c})^{3/2}.C^{te}$$

La dérivée de cette expression par rapport à ϵ pour $\epsilon = \epsilon_c$ est nulle.

Il n'y a donc pas de rupture de pente rigoureuse lorsque le critère théorique est atteint de sorte que l'extrapolation des courbes expérimentales avant et après début de plastification donne , au point de concours, une charge certainement supérieure à la charge critique théorique.

Essai Brinell

Bille Ø 10 mm
P = 3000 kgf
HB = 65



Un calcul comparatif de pénétration élastique d'un acier doux dans les conditions de l'essai Brinell, et de l'enfoncement correspondant à une dureté Brinell HB = 65, donne, à l'échelle, la disposition du croquis ci-contre.

On constate que l'empreinte Brinell occupe sensiblement en surface le domaine hypercritique initial.

Il n'est pas aberrant de penser que, même dans ces conditions sévères de plastification, la limite du domaine plastique conserve la même allure générale que celle du domaine hypercritique.

Si l'essai est poursuivi au delà de sa durée normale, à charge constante, la pénétration se stabilise. Cet arrêt du fluage est dû à un appui périphérique sur le milieu élastique, un bulbe plastique subsistant sous la partie centrale du poinçon.

3°) Critère de VON MISES

Les résultats donnés par le critère de VON MISES sont, dans tous les cas, trés voisins de ceux du critère de TRESCA.

Si l'on adopte comme critère la racine carrée de l'énergie de distorsion affectée d'un coefficient convenable:

$$k_m = \sqrt{\frac{\sum (\sigma_i - \sigma_j)^2}{8}} \qquad (\sigma_i \ , \ \sigma_j \text{ contraintes principales}),$$

cette expression s'identifie au cisaillement maximal lorsque 2 des contraintes principales sont égales; elle en diffère au maximum dans le rapport $\sqrt{3/4} = 0,87$ lorsque la contrainte intermédiaire est la moyenne arithmétique des deux autres.

L'écart entre les rayons polaires des courbes figuratives de k_m et du cisaillement maximal est encore plus faible dans le cas présent: si l'on considère par exemple les courbes de rayon polaire supérieur à 1 (qui, comme nous le verrons,§ IIC,sont assez voisines de celles du problème de Boussinesq), ces courbes sont sensiblement homothétiques par rapport au centre de la charge dans un rapport variant comme la puissance -1/2 du critère

Il en résulte que la courbe de VON MISES sera intérieure ou confondue avec la courbe de TRESCA, le rapport des rayons polaires étant compris entre $\sqrt[4]{3/4} = 0,93$ et 1.

La planche IX donne à titre d'exemple deux courbes homologues construites dans le cas d'une charge concentrée unique. Ces courbes (cf Pl XIV) sont voisines, ou trés voisines, à une homothétie près des courbes non fermées correspondantes dans le problème du poinçon sphérique, et donnent avec précision l'écart relatif dans la figuration des deux critères:

Les deux courbes sont tangentes sur l'axe ($\sigma_r = \sigma_\theta$) et concourantes au point anguleux de la courbe de TRESCA (égalité de σ_θ et de la contrainte principale méridienne de compression).

Au voisinage de ce point anguleux, le critère de VON MISES reste continu, d'où un écart local de la courbe correspondante qui présente un sommet arrondi. Cette différence locale des deux types de courbes est figurée en détail aux planches X et XI.

L'écart maximum des critères a lieu en surface (état de cisaillement simple).Comme on le voit sur les planches X et XI,

la concentration locale et superficielle des sollicitations au voisinage du bord est tout à fait analogue pour les deux critères, légèrement plus faible dans le cas de VON MISES.

En ce qui concerne les courbes fermées situées sous le cercle de charge, les différences sont encore plus faibles, la courbe de VON MISES étant entièrement intérieure, sauf aux deux points de rencontre avec l'axe où elle est tangente à la courbe de TRESCA. Ce cas n'a pas été représenté, les trés faibles écarts conduisant à une précision graphique illusoire.

En conclusion, les deux critères sont rigoureusement équivalents sur l'axe où se produisent les sollicitations extrêmales, et les faibles différences observées dans les cas les plus défavorables, notamment en surface, sont négligeables pour tous les problèmes usuels de sécurité.

4°) Contrainte principale de traction

Pour des matériaux dont la loi de rupture peut être représentée par une "courbe intrinsèque" trés ouverte: béton, matériaux pierreux homogènes...etc., un examen rapide du tenseur des contraintes dans le présent problème montre qu'une rupture en compression ne peut pas se produire et que les seuls cercles de rupture possibles sont tangents au sommet de la courbe intrinsèque.

Le critère peut donc se simplifier à la seule considération de la "contrainte principale de traction".

La planche XII figure les courbes d'égale contrainte principale de traction au voisinage du bord du contact.

On voit que ces contraintes sont localisées, superficielles, trés rapidement négligeables en profondeur. Les domaines de dépassement du critère ont la forme de minces couronnes prenant leur origine trés légèrement à l'intérieur du bord du contact se développant sur une faible distance à l'extérieur.

Cette disposition est conforme à l'expérience bien connue de fissuration superficielle d'un matériau fragile sous un poinçon arrondi: cette fissuration se développe sur une couronne entourant le bord du contact avec une intensité décroissante. Ces fissures de traction sont trés peu profondes, concentriques au bord et normales à la surface limite. (isostatiques de la 1ère famille)

a) massif

Les courbes de la planche XII peuvent permettre un calcul rationnel du ferraillage de peau nécessaire pour armer la surface d'un massif de béton soumis à des charges concentrées arrondies.

b) dalle

Dans le cas d'une dalle (dans la mesure où l'épaisseur en est sensiblement supérieure au diamètre du contact), ce calcul du ferraillage superficiel sera également applicable (les armatures de flexion étant calculées séparément).

c) socle

Pour un socle, c'est-à-dire un massif de dimensions relativement réduites, une méthode de "coupures" le long des parois du socle, permet, en superposant l'action des contraintes aux limites changées de signe (et schématisées en limite supérieure) à la solution du milieu semi-indéfini, de calculer l'armature du socle.

Le calcul est très simplifié du fait que :

- le ferraillage à la surface supérieure ne dépend pratiquement que de la solution du milieu semi-indéfini
- le ferraillage en partie courante ne dépend pratiquement que des conditions aux limites latérales prises en limite supérieure .

o

o o

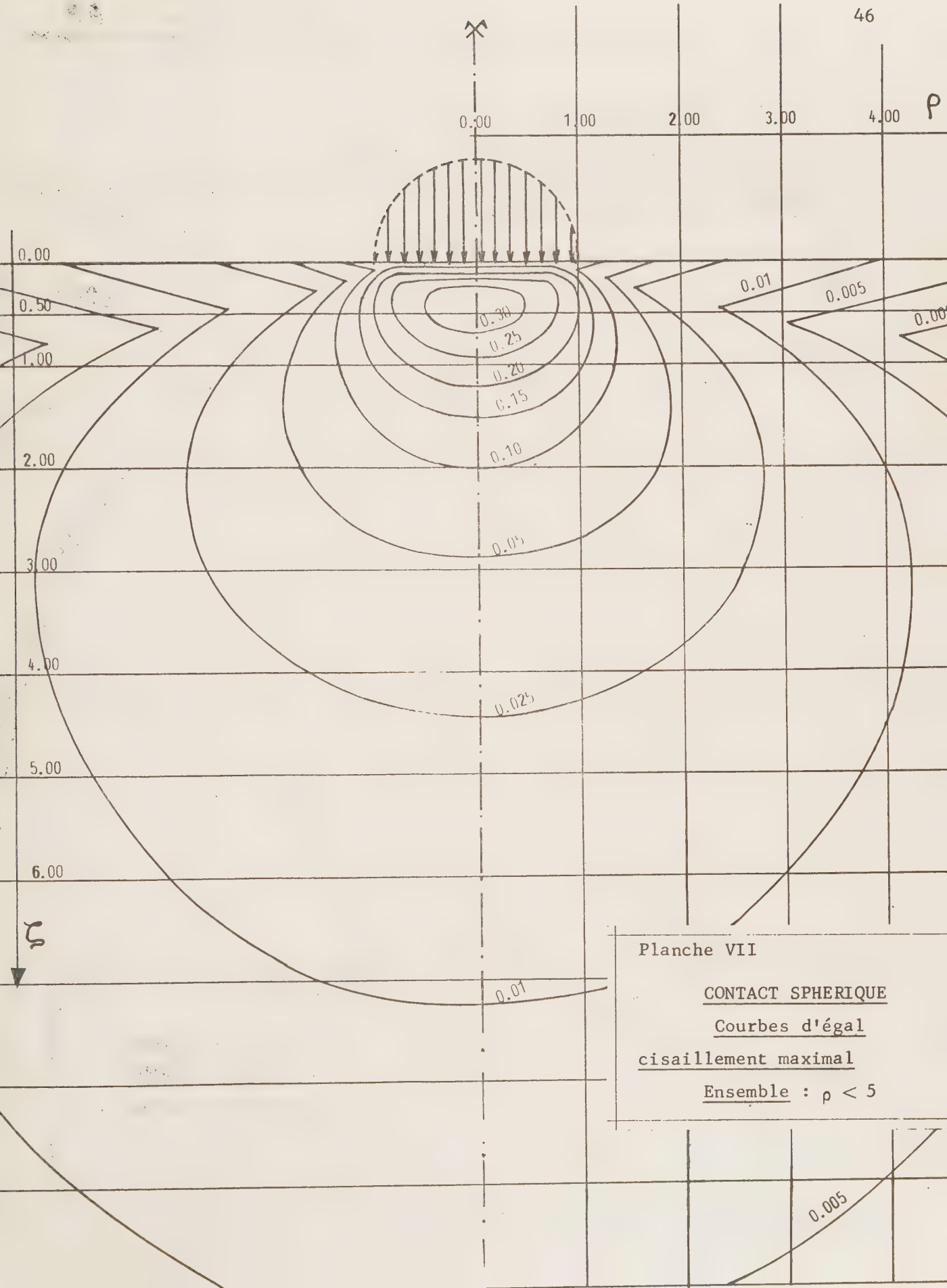


Planche VII

CONTACT SPHERIQUE

Courbes d'égal cisaillement maximal

Ensemble : $\rho < 5$

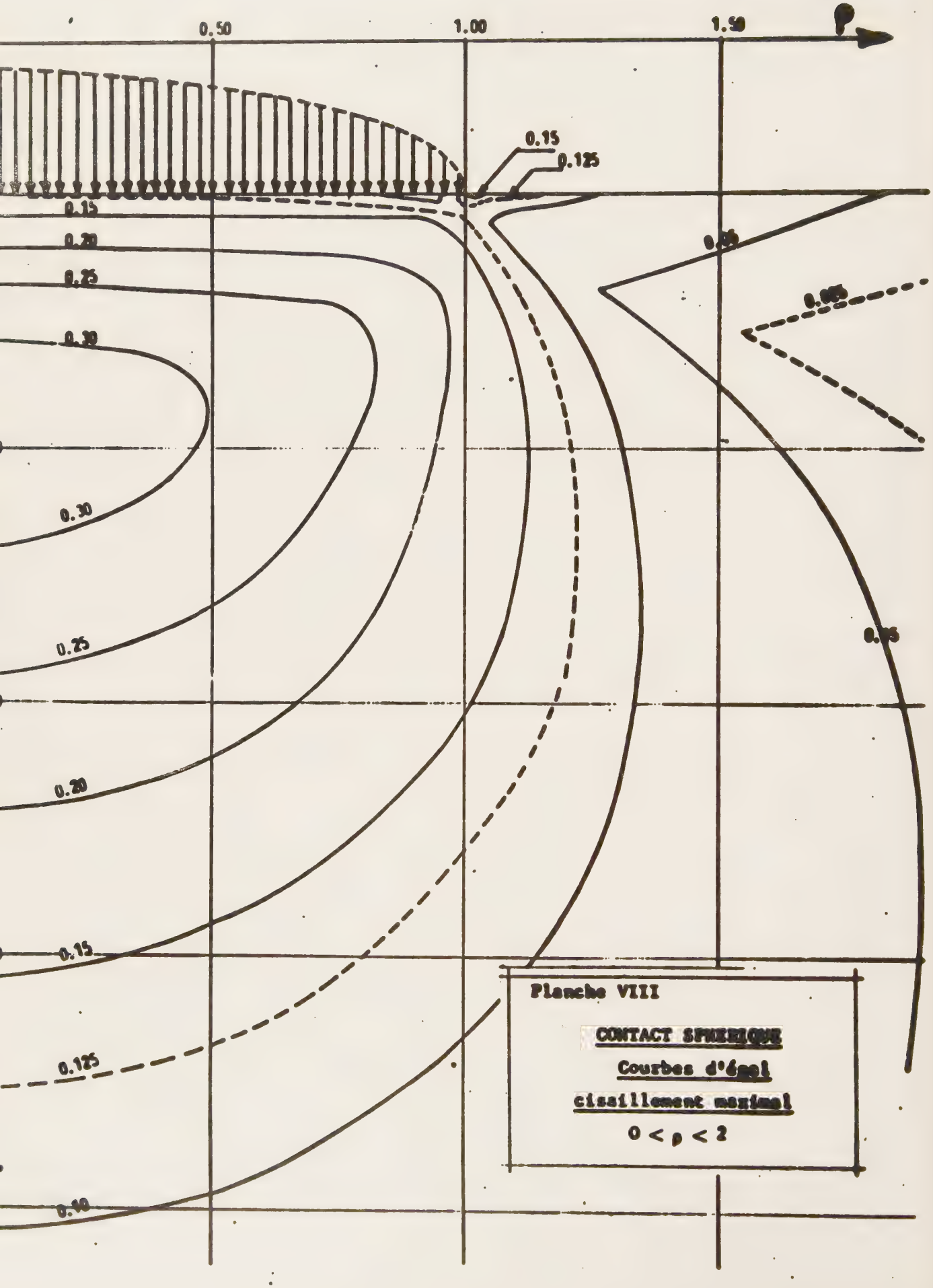


Planche VIII

CONTACT SPHERIQUE

Courbes d'égal cisaillement maximal

$0 < \rho < 2$

Valeurs numériques:

Charge $P = 2\pi/3$ $\quad \nu = 0.25$

$k = \tau_{max} = 0.01$ (TRESCA)

$k = \sqrt{1/8.\ \Sigma\ (\sigma_i - \sigma_j)^2} = 0.01$ (VON MISES)

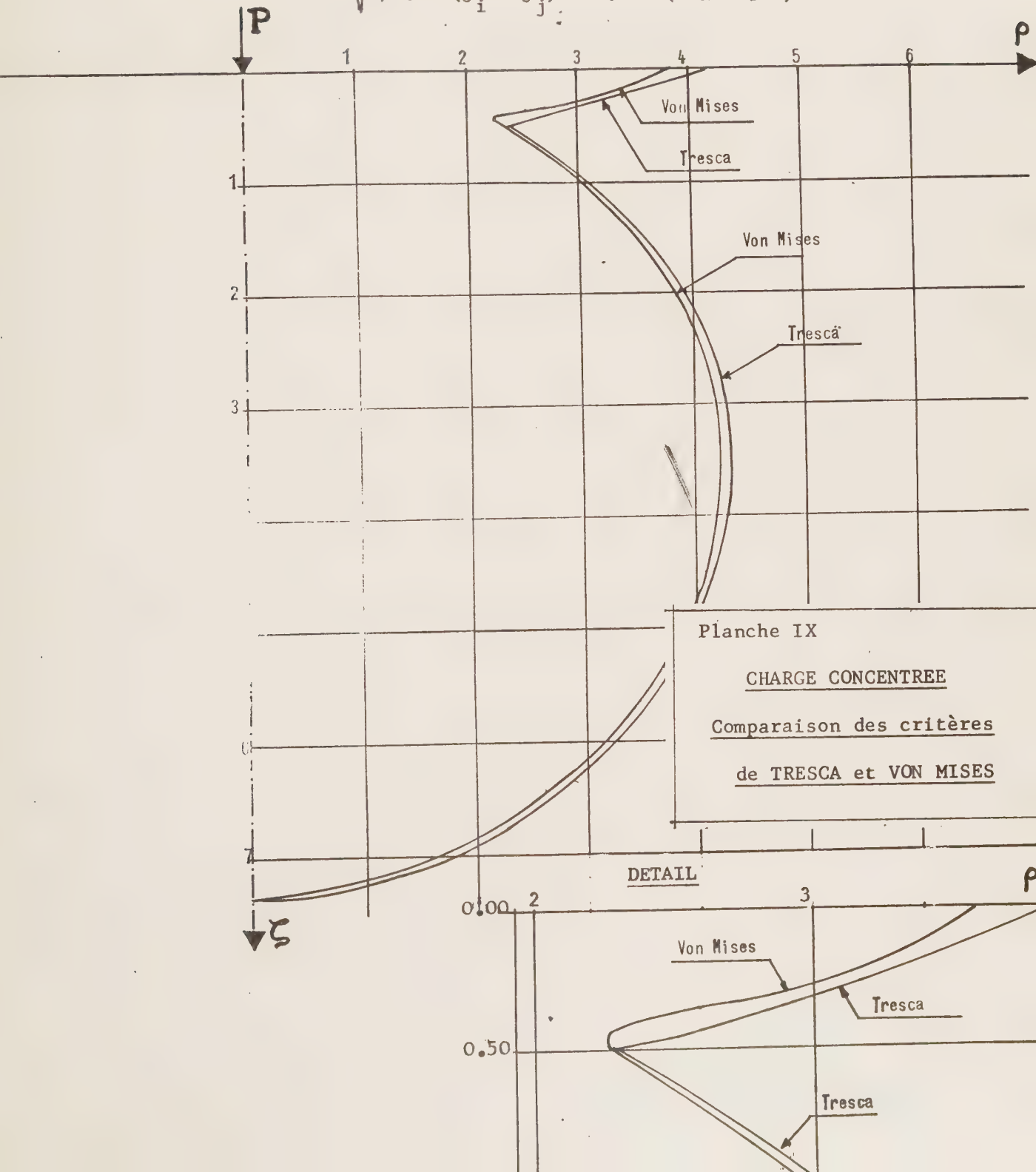


Planche IX

CHARGE CONCENTREE

Comparaison des critères

de TRESCA et VON MISES

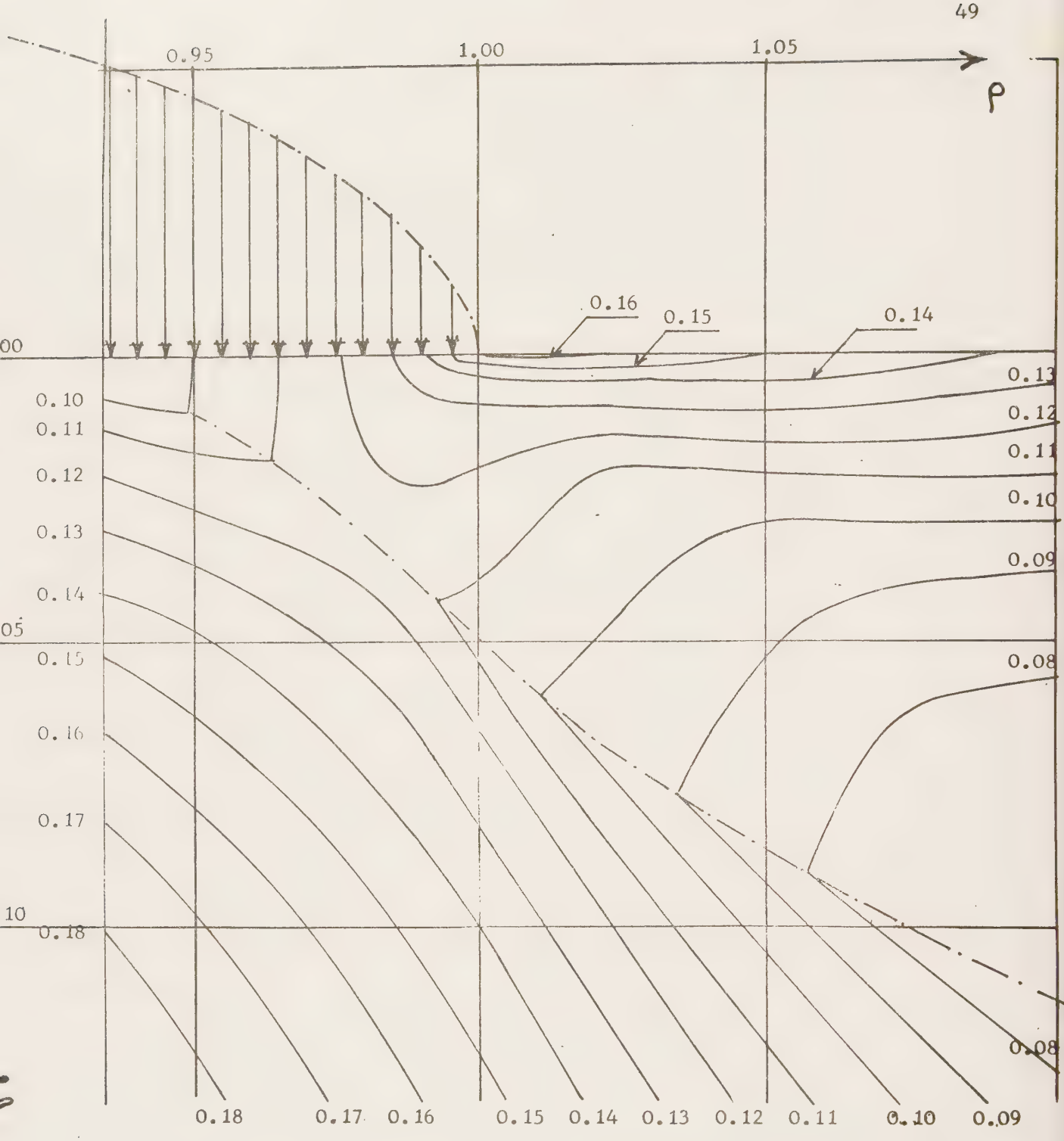


Planche X

CONTACT SPHERIQUE

Cisaillement maximal au bord

du cercle de charge

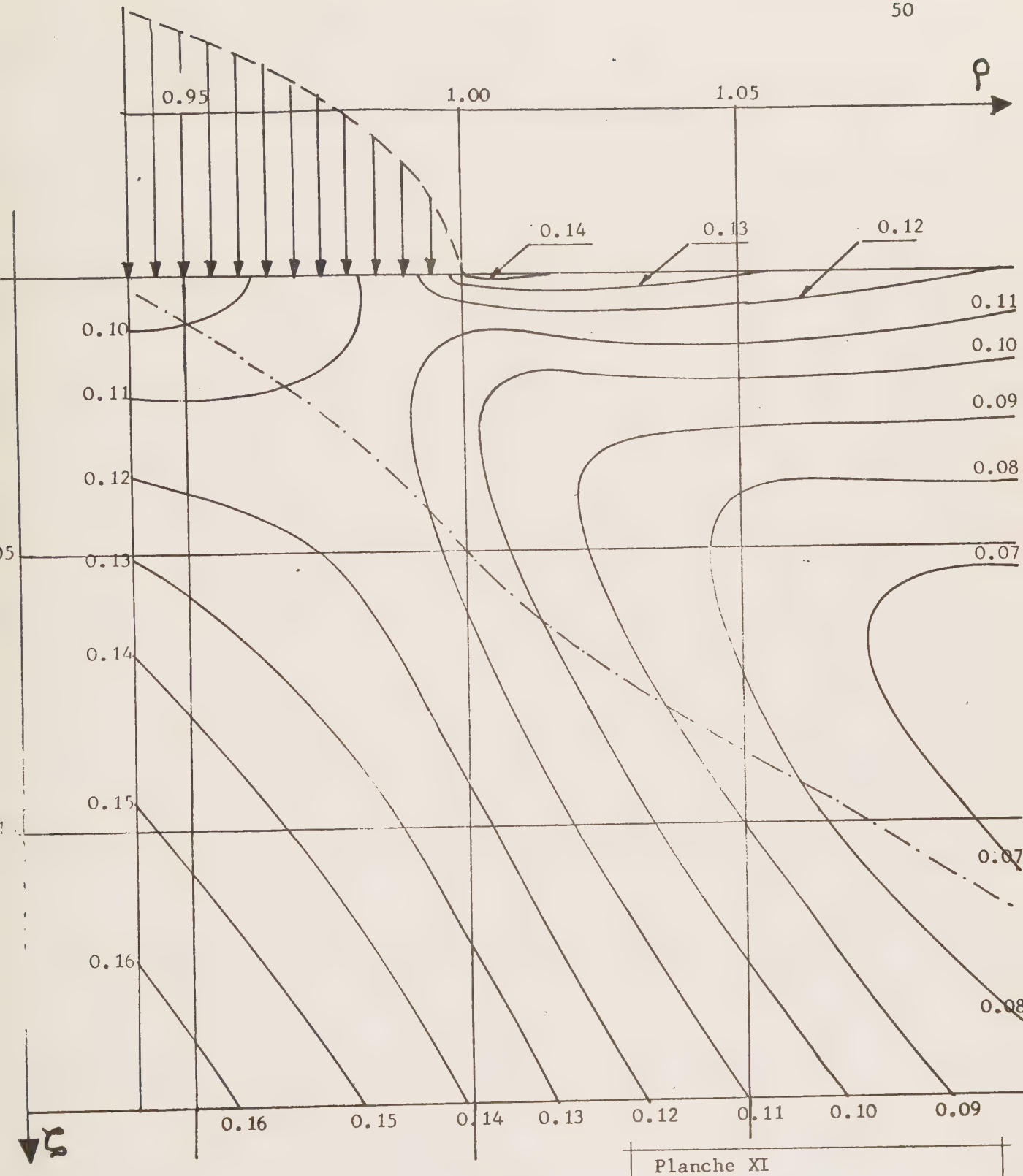


Planche XI

CONTACT SPHERIQUE

Critère de VON MISES

$\sqrt{1/8\ \Sigma(\sigma_i - \sigma_j)^2} = \text{Cte}$

au voisinage du bord du cercle de charge

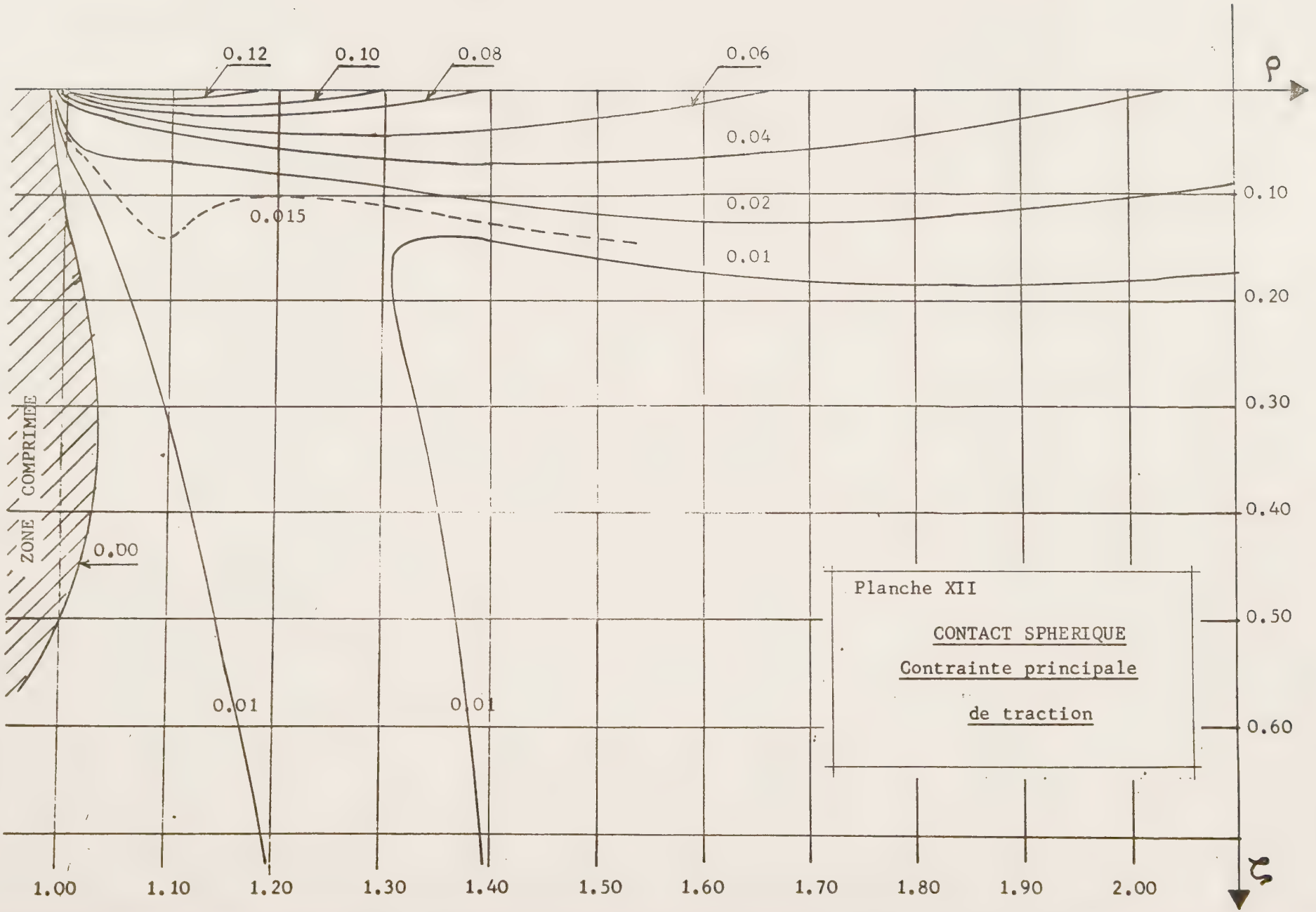


Planche XII

CONTACT SPHERIQUE

Contrainte principale

de traction

C/ - COMPARAISON AU CAS DE LA CHARGE CONCENTREE

L'assimilation d'une charge répartie sur une petite surface à une charge rigoureusement concentrée permet de résoudre de nombreux problèmes de structures. Le présent paragraphe examine, dans le cas du poinçon sphérique, la validité de cette approximation.

Pour des valeurs croissantes de la distance au centre de charge, la distribution des contraintes tend ici de façon particulièrement rapide vers celle du problème de Boussinesq pour des points situés à l'intérieur du milieu élastique. Nous avons vu par ailleurs que, pour des points de la surface extérieurs au contact, le tenseur des contraintes est identique à celui du problème de la charge ponctuelle.

La planche XIII compare, dans les deux problèmes, la direction et le signe des contraintes principales. On voit que, pour un rayon polaire supérieur à 1,5 , les isostatiques homologues sont déjà trés voisines dans les deux cas. Dans le cas de la charge ponctuelle la limite de compression orthoradiale devient une droite passant par le centre (asymptote de la courbe homologue pour le poinçon sphérique).

Le diagramme de la planche XIV conduit à un résultat analogue en ce qui concerne les lignes d'égal cisaillement maximal. Il est entendu que, pour un rayon polaire peu inférieur à 1,5 environ, les états de contraintes divergent trés rapidement, et leur comparaison perd tout intérêt.

Le diagramme de la planche XV donne une comparaison chiffrée des valeurs du cisaillement maximal dans les deux cas, en valeur relative à droite, en valeur absolue à gauche, l'unité étant la pression axiale p_o sous le poinçon sphérique.

On constate que l'erreur absolue, qui est maximale sur l'axe diminue trés vite avec la profondeur:

. 5% de la pression p_o à une profondeur égale à 2a

. moins de 1% à une profondeur de 4a.

L'erreur relative diminue plus lentement, et, par exemple,

reste de 5% à une distance de 4,5a.

Le diagramme ci-dessus ne renseigne que sur le cisaillement maximal, c'est à dire un seul paramètre de l'état de contraintes, paramètre qui est toutefois l'un des plus représentatifs de la sécurité. Le choix d'autres paramètres (contrainte principale majeure, ou contrainte moyenne par exemple), donne un ordre de grandeur voisin de l'erreur en fonction du rayon polaire.

Le diagramme choisi de l'erreur sur le cisaillement maximal sera généralement suffisant pour apprécier la validité d'un calcul "en charge concentrée".

Exemples d'applications

Appui à contact sphérique normal sur une structure élastique :

Si le problème peut être entièrement résolu avec une charge ponctuelle (explicitement ou numériquement), on voit que la solution restera valable jusqu'à une distance très faible du centre de contact (2,5 à 1 fois le diamètre du contact, selon la précision requise). Pour le domaine intérieur comprenant la charge, la solution sera celle du milieu semi-indéfini, avec une correction éventuelle tenant compte des conditions aux limites du domaine extérieur.

En général, le problème d'ensemble de la structure, même avec une charge ponctuelle, ne peut être lui-même résolu que par une méthode simplifiée (théorie des pièces prismatiques, des voiles minces etc...). En ce cas, c'est le domaine limite d'application de ces méthodes simplifiées au voisinage de la charge, compte-tenu de la répartition tridimensionnelle des contraintes, qui prévaudra (par exemple pour une plaque mince la théorie n'est applicable qu'à une distance supérieure à 3 diamètres ou plus ...). A l'intérieur de ce domaine, on est ramené au cas précédent.

Mécanique des sols :

Le problème du contact sphérique est peu fréquent en mécanique des sols, mais on peut y rattacher celui de certaines fondations sur semelles circulaires souples à charge centrale. En ce cas, pour un calcul de tassement, par exemple, la solution de Boussinesq donnera une précision très suffisante au delà d'une distance du centre de 1 diamètre environ.

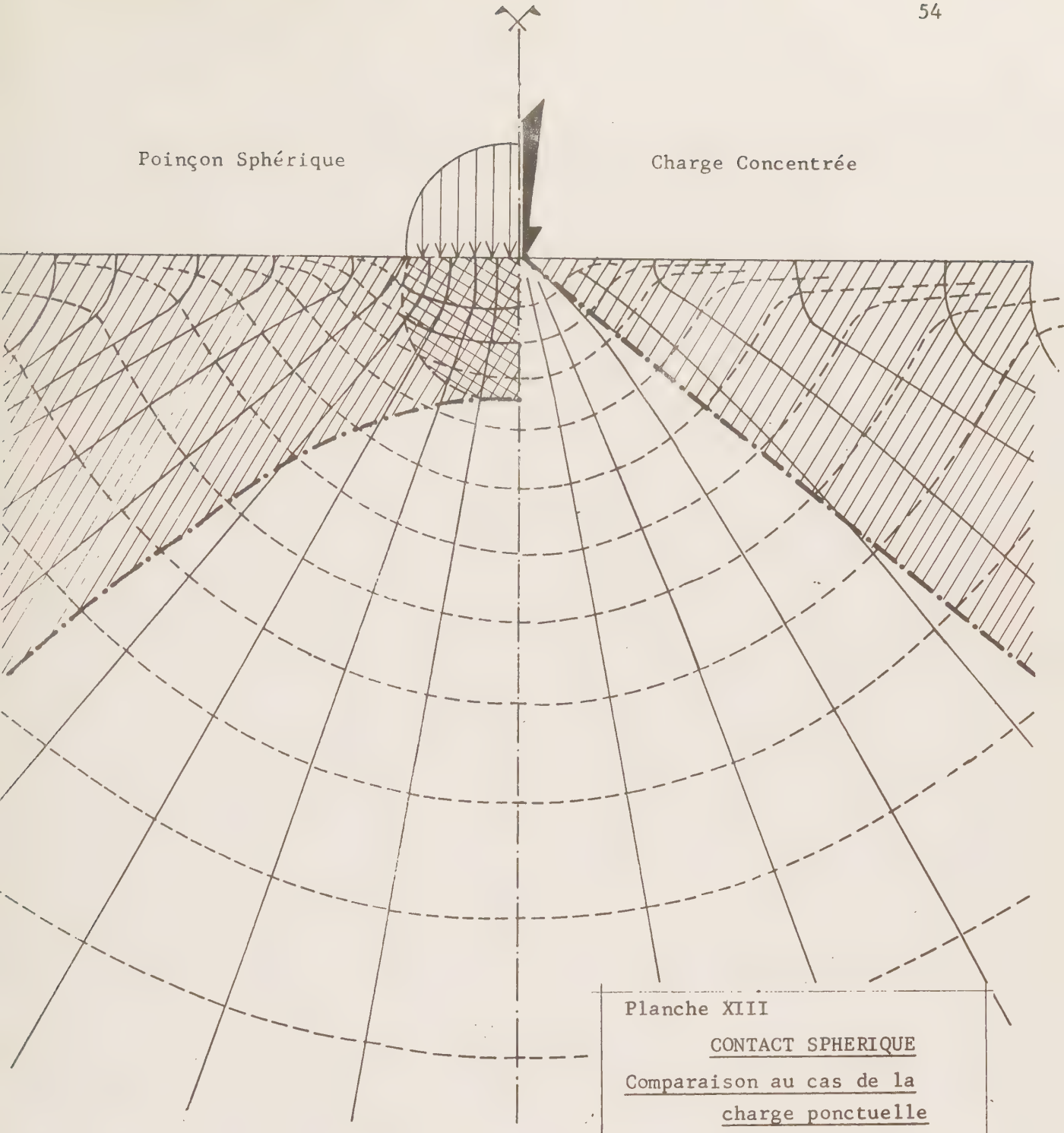


Planche XIII

CONTACT SPHERIQUE

Comparaison au cas de la charge ponctuelle

Direction et signe des contraintes principales

——— isostatique (compression)

– – – – isostatique (traction)

Compression orthoradiale

Compression triaxiale

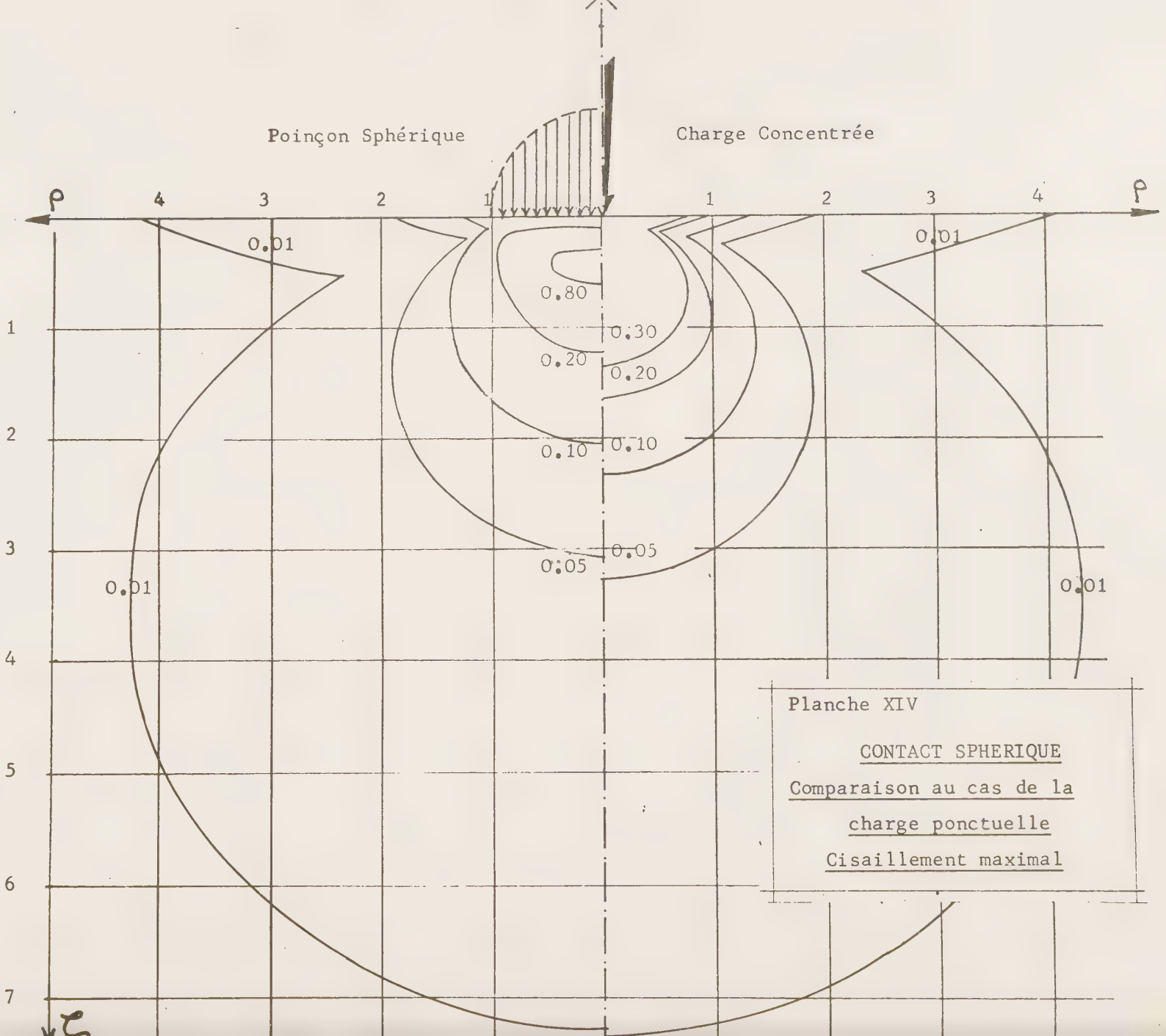


Planche XIV

CONTACT SPHERIQUE

Comparaison au cas de la charge ponctuelle

Cisaillement maximal

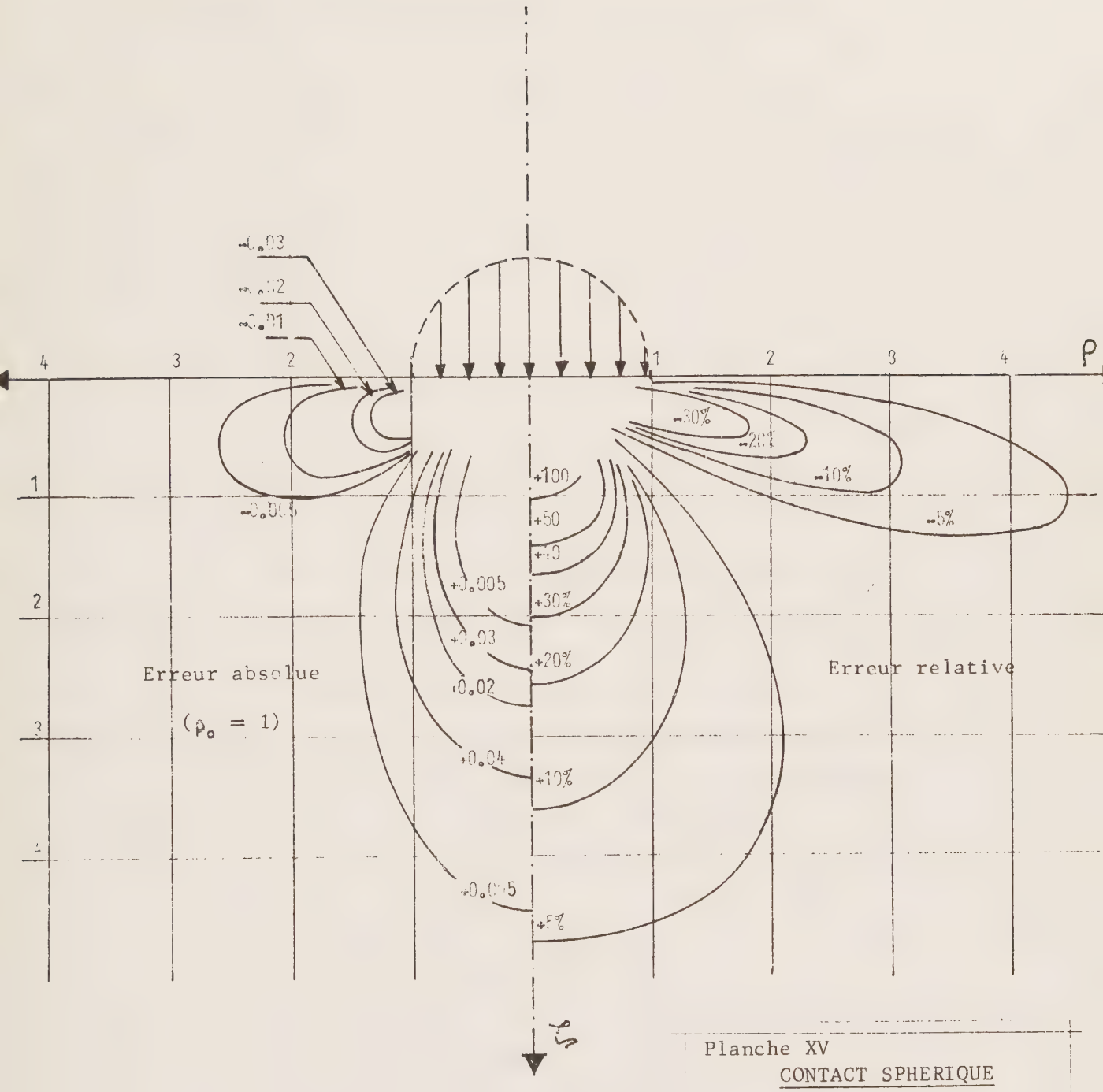


Planche XV

CONTACT SPHERIQUE

Comparaison au cas de la charge ponctuelle

Augmentation du cisaillement maximal dans le cas de la charge ponctuelle

D/ - DEFORMEE DE SURFACE , INFLUENCE DU DEPLACEMENT HORIZONTAL.

1°) Déplacement vertical

Le système de SNEDDON (2) donne en particulier les composantes de déplacement u_r et u_z en fonction des intégrales I_n^m calculées au paragraphe I - B .

En surface, il a été admis précédemment, que le déplacement était purement vertical, hypothèse qui sera discutée au paragraphe suivant D/ 2°).

Dans ces conditions, l'expression de u_z en surface en fonction de ρ donne l'équation de la méridienne de la surface déformée.

Compte-tenu des expressions simplifiées des intégrales I_n^m en surface, on obtient tous calculs faits :

- sous la surface de charge $\rho \leq 1$

(30) $u_z = 2\,\varepsilon\,(1 - \rho^2/2)$ (ε étant la flèche de la calotte sphérique en contact).

C'est la condition aux limites qui a été écrite en début de calcul sous la surface de charge, en assimilant l'arc de cercle à un arc parabolique, et en négligeant le déplacement horizontal.

La pénétration totale sur l'axe est égale au double de la flèche ε de la calotte de contact.

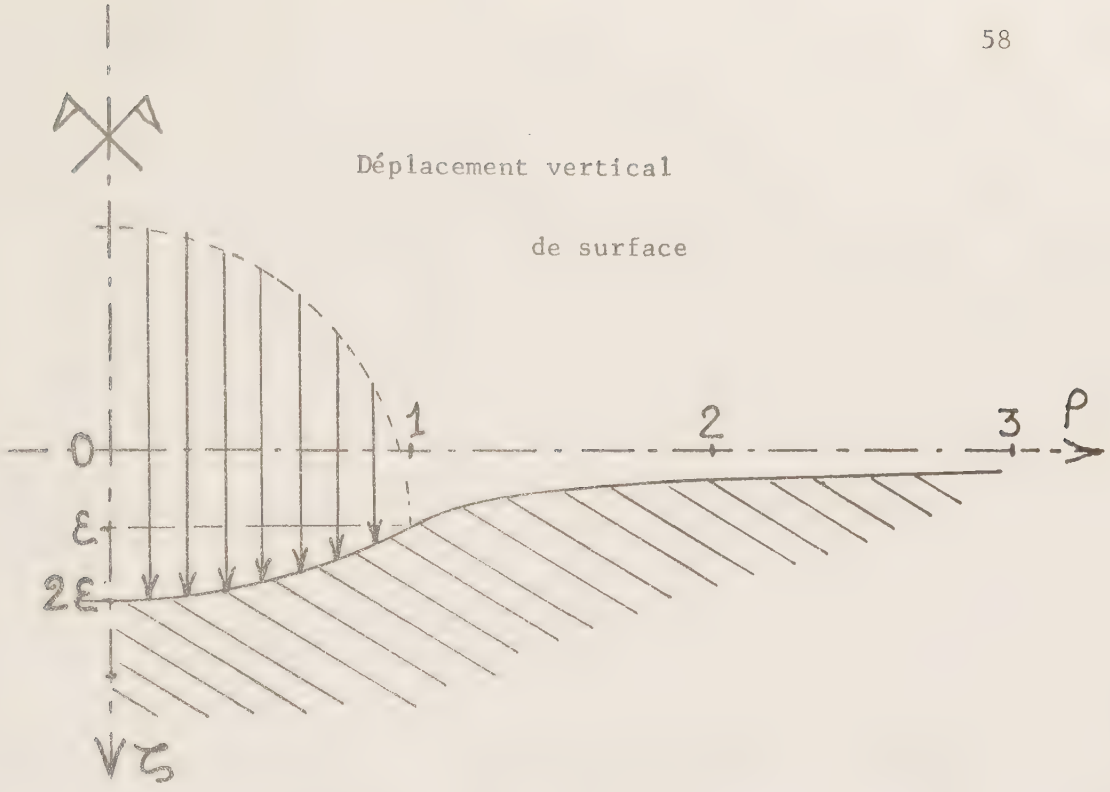
- en dehors de la surface de charge $\rho \geq 1$

(31) $u_z = \frac{2\,\varepsilon}{\pi}\,(2 - \rho^2)\,\text{Arc sin}\frac{1}{\rho} + \sqrt{\rho^2 - 1}$

Le diagramme de cette méridienne est donné à la page suivante.

On vérifie sur les équations (30) et (31) que les deux branches de courbes se raccordent pour $\rho = 1$:

$$(u_z)_{\rho=1} = \varepsilon \qquad \frac{d}{d\rho}(u_z)_{\rho=1} = 2\varepsilon$$



Pour un point éloigné, un développement limité de u_z donne pour partie principale

$$u_z \sim \frac{8}{3\pi\rho}\,\varepsilon \quad , \text{ branche d'hyperbole équilatère}$$

correspondant au problème connu de la charge ponctuelle :

$$u_z = \frac{P}{4\pi\rho a} \cdot \frac{\lambda + 2\mu}{\mu(\lambda + \mu)}$$

2°) Déplacement horizontal

a) expressions du déplacement horizontal de surface

On obtient de même :

. à l'intérieur du cercle de charge $(\rho \leq 1)$

$$u_r = -\frac{A}{a^3} \cdot \frac{1}{3\rho}\left[1 - (1 - \rho^2)^{3/2}\right]$$

avec : $\frac{A}{a^3} = \frac{8}{\pi}\,\frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \varepsilon = \frac{4}{\pi}\,\frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot \varepsilon$

. à l'extérieur $(\rho \geq 1)$

$$u_r = - \frac{A}{a^3} \cdot \frac{1}{3\rho} \quad , \text{ soit, en désignant par } u_1$$

la valeur particulière correspondant à $\rho = 1$:

$$(31) \quad \begin{cases} u_r = \dfrac{u_1}{\rho}\left[1 - (1 - \rho^2)^{3/2}\right] & \text{pour } \rho \leq 1 \\ u_r = \dfrac{u_1}{\rho} & \text{pour } \rho \geq 1 \\ u_1 = \dfrac{4}{3\pi} \cdot \dfrac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \cdot \varepsilon \end{cases}$$

Remarque : le déplacement horizontal de surface en dehors du cercle de charge peut également s'obtenir par une intégration en surface de la solution de BOUSSINESQ , selon un calcul analogue au calcul des contraintes superficielles traité à la 2ème partie, chapitre I B. Ce calcul établit de même pour le déplacement horizontal la propriété énoncée en 2ème partie (I C 1°) pour le tenseur des contraintes :

Une charge à symétrie de révolution située à l'intérieur [illegible] de charge de rayon a engendre en surface, en dehors de ce cercle, un déplacement horizontal qui ne dépend que du rayon polaire et de la charge totale P . Il est en particulier le même que celui qui serait produit par une charge P rigoureusement concentrée, placée au centre.

Cette propriété est d'ailleurs une conséquence de celle du tenseur des contraintes : il suffit de considérer la déformation du feuillet superficiel (τ_{rz} étant nul et stationnaire en surface).

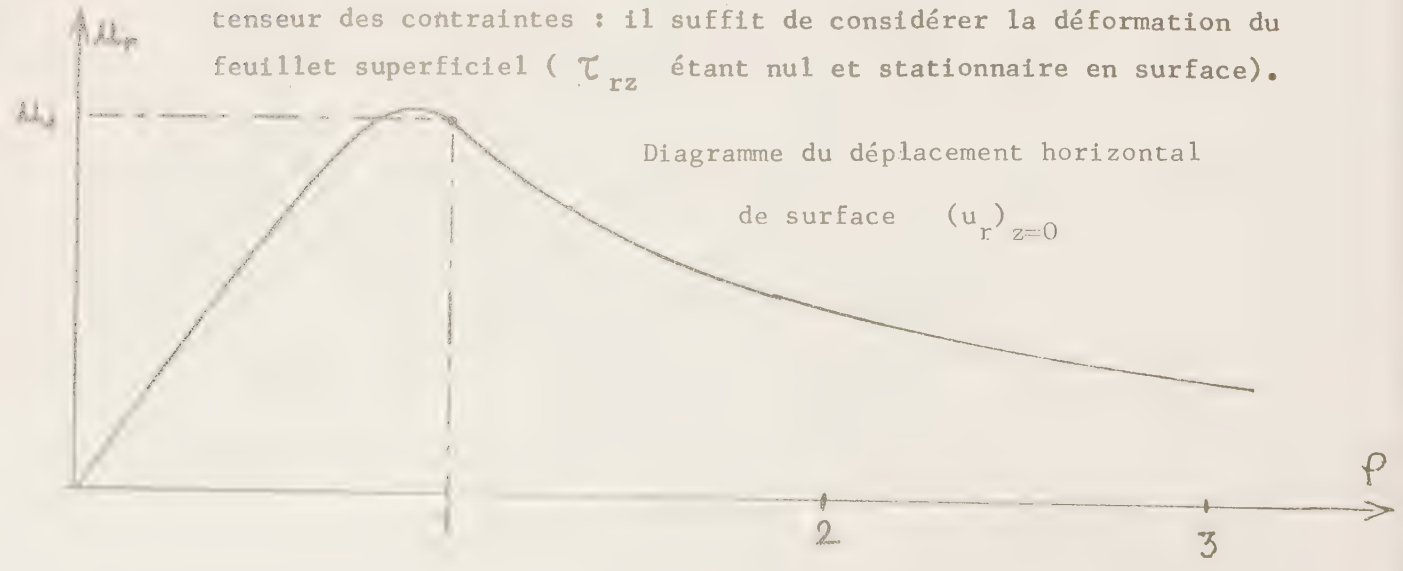
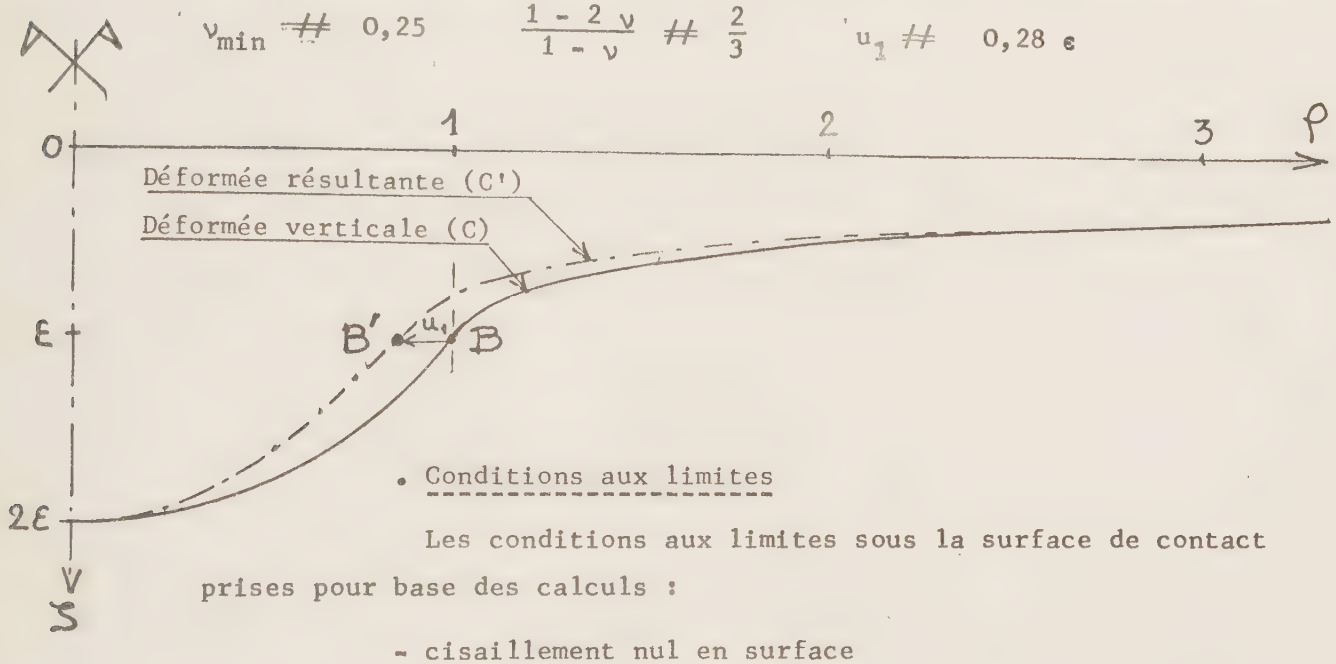


Diagramme du déplacement horizontal de surface $(u_r)_{z=0}$

• Déformée résultante en surface :

L'importance du déplacement horizontal par rapport au déplacement vertical dépend du coefficient de POISSON par l'expression $\frac{1-2\nu}{1-\nu}$, maximale lorsque ν est minimal, soit, pratiquement, pour

$\nu_{min} \# 0,25 \qquad \frac{1-2\nu}{1-\nu} \# \frac{2}{3} \qquad u_1 \# 0,28\ \varepsilon$



• Conditions aux limites

Les conditions aux limites sous la surface de contact prises pour base des calculs :

- cisaillement nul en surface
- déplacement vertical identique, à une constante près, à l'ordonnée correspondante de la méridienne (C) du poinçon,

conduisent par suite du déplacement horizontal à une déformée de surface (C') distincte de cette méridienne, ce qui est en désaccord avec l'hypothèse d'indéformabilité du poinçon.

Les calculs de contraintes et déformations ont été effectués avec les approximations usuelles applicables aux "petites déformations" :

Nous supposerons par exemple que $\frac{\varepsilon}{a} \leq 1/10$, et nous admettrons qu'en ce cas, l'incidence de ces approximations est négligeable sur le calcul de répartition des contraintes, à partir de conditions aux limites rigoureuses. Ce calcul est vraisemblablement satisfaisant pour des applications pratiques de rapport $\frac{\varepsilon}{a}$ sensiblement plus élevé, mais seul un calcul de "grandes déformations" pourrait en définir la validité pour une précision donnée.

L'étude générale de la validité du calcul en "petite déformation" ne sera donc pas abordée dans son ensemble, mais nous examinerons seulement l'influence de l'erreur commise sur les "conditions aux

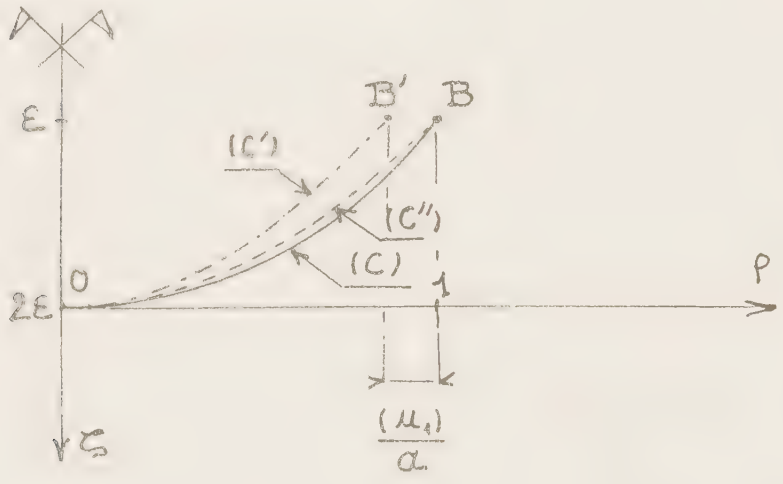
limites" sous le poinçon, qui est propre au présent problème.

Cette influence dépend des conditions de frottement selon la surface de contact :

a) Contact sans frottement :

La condition $\tau_{rz} = 0$ est satisfaite a priori.

Pour obtenir une meilleure approximation de la déformée finale, on peut considérer une surface de charge initiale ayant subi une dilatation cylindrique dans le rapport $1 + \frac{|u_1|}{a}$, pour une même charge totale. La déformée finale dans ce cas, au second ordre



près la courbe (C'') affine de (C) par rapport à $O\zeta$, et telle que le déplacement horizontal s'annule en surface.

Or, une telle dilatation dont l'incidence sur les contraintes serait seulement une minoration relative $\frac{2\,|u_1|}{a}$ (max. 5,6 %), est déjà prise en compte de façon approchée par le calcul des contraintes en "petites déformations", les contraintes de surface étant rapportées à la surface initiale, déduite de la déformée en plan par une dilatation de rapport variable $1 + \frac{|u_r|}{\rho\, a}$. Le diagramme de u_r (p 59) montre que le rapport $\frac{|u_r|}{\rho a}$ pour $\rho < 1$ est pratiquement constant et voisin de $\frac{|u_1|}{a}$.

L'ordre de grandeur de l'erreur commise sur la forme du poinçon résulte donc de la différence entre les courbes C'' et C ; on peut en déduire, du fait de la diminution du rayon de courbure au centre

et de sa croissance avec ρ, que la charge normale calculée au centre est légèrement supérieure à la charge réelle, et inversement au voisinage du bord.

On obtient une limite supérieure de l'erreur commise au centre en considérant le poinçon sphérique (ou paraboloïdal) osculateur de la courbe (C") au sommet :

- Equation de (C) , rapportée au sommet : $y = \rho^2 \varepsilon$
- Equation de (C") , " " " : $y = \rho^2 \varepsilon - (u_r - \rho u_1) \rho \frac{a}{R}$

soit, en développant l'expression de u_r au voisinage de $\rho = 0$, l'équation de la parabole osculatrice :

$$y = \rho^2 \varepsilon - \rho^2 \frac{u_1}{2} \frac{a}{R} \quad ,$$

avec : $u_1 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \varepsilon$. et $a/R \sim \frac{2\varepsilon}{a}$

Il en résulte une erreur relative sur le rayon de courbure de $\frac{u_1}{2\varepsilon} \cdot \frac{a}{R} = \frac{u_1}{a}$, soit sur la charge au voisinage du centre :

$$\frac{u_1}{2a} = \frac{2}{3\pi} \frac{1 - 2\nu}{1 - \nu} \frac{\varepsilon}{a} \quad \text{(max. 0,14 \% pour } \nu = 0{,}25 \text{ et } \frac{\varepsilon}{a} = \frac{1}{10} \text{).}$$

Cette erreur sur la distribution de la charge verticale, et par suite sur la répartition des contraintes est négligeable.

β) Contact rugueux

Les présents calculs, selon la méthode de SNEDDON, ne sont pas normalement applicables au cas d'un contact rugueux pour lequel la condition $\tau_{rz} = 0$ sous le poinçon devrait être remplacée par : $(u_r)_{\zeta = 0} = 0$.

Dans le cas du poinçon indéformable parfaitement rugueux, l'incidence sur les contraintes de surface est certainement importante : en admettant que les contraintes tangentielles restent relativement faibles par rapport à la contrainte verticale, σ_r et σ_θ seront toutes

deux voisines de $\frac{\nu}{1-\nu}\,\sigma_z$, en l'absence de déformation horizontale, répartition nettement différente de celle du poinçon lisse.

Nous remarquerons cependant que le cas du poinçon indéformable est un problème théorique. Pour un poinçon élastique (cf. I F) des contraintes tangentielles ne se produisent dans la surface de contact que si les déplacements horizontaux u_r calculés sont différents dans les deux milieux. Or, les formules (31) sont applicables pour la même flèche ϵ et une déformation petite ; les déplacements u_r seront donc dans le rapport :

$$\frac{u_{r_1}}{u_{r_2}} = \frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1} \cdot \frac{1-\nu_2}{1-2\nu_2}$$

Si les coefficients de POISSON sont les mêmes dans les deux milieux, le contact se comporte comme un contact parfaitement lisse.

S'ils sont différents, pour des valeurs pratiques comprises entre 0,20 et 0,35, l'erreur commise horizontalement sur la déformée est ramenée dans les cas les plus défavorables à $\frac{\epsilon}{12}$ environ ; le problème ne s'écarte pas sensiblement de celui du poinçon lisse, notamment pour les valeurs de la contrainte normale verticale σ_r ; la compression radiale et orthoradiale en surface sous le poinçon est par contre modifiée (15 % env. au maximum au centre de la charge), diminuée si le coefficient de POISSON du poinçon est inférieur à celui du milieu indéfini, augmentée dans le cas inverse.

L'assimilation au problème du poinçon lisse n'est donc valable en ce qui concerne les contraintes au voisinage de la charge que pour des valeurs très voisines des coefficients de POISSON dans les deux milieux en contact.

o

o o

E/ - INFLUENCE DU COEFFICIENT DE POISSON

La distribution des contraintes dans le milieu élastique n'est pas qualitativement modifiée par une variation du coefficient de POISSON, si l'on excepte le cas limite théorique $\nu = 0,5$

La composante de contraintes σ_z, la plus élevée en module sous la charge et au voisinage de l'axe, est indépendante de ν, ainsi que τ_{rz}, les autres composantes cylindriques des contraintes étant fonctions linéaires de ν. Cette propriété, qui résulte par superposition de celle de la solution de BOUSSINESQ, explique l'influence modérée du coefficient de POISSON sur les sollicitations maximales.

1°) Cisaillement maximal dans le milieu élastique

(cf courbes d'égal cisaillement maximal Pl XVI)

Une augmentation du coefficient de POISSON entraine:

- une légère diminution du cisaillement maximal (rapporté à la pression axiale p_o) dans la zône axiale, avec déplacement vers le bas du point de cisaillement extrêmal.
- une diminution du cisaillement dans la zône marginale, en intensité et en étendue; la courbe d'égales contraintes principales limitant cette zône se rapproche de la surface.

A la limite, pour $\nu = 0,5$, l'effet marginal disparaît: la courbe d'égales contraintes principales vient se confondre avec la surface et le cisaillement maximal en surface est nul.

2°) Valeurs extrêmales du cisaillement

Les courbes ci-dessus montrent que les valeurs extrêmales du cisaillement correspondent exclusivement à des points situés sur l'axe et en surface, le cisaillement sur l'axe restant toujours prépondérant.

Le tableau de la page suivante donne en fonction de ν la position et l'intensité du cisaillement maximal sur l'axe.

La variation de τ_{max}/p_o est pratiquement linéaire en fonction de ν et peut s'exprimer par la formule approchée:

(32) $$\boxed{\tau_{max} = (0,381 - 0,237\nu)p_o}$$ (dernière colonne du tableau)

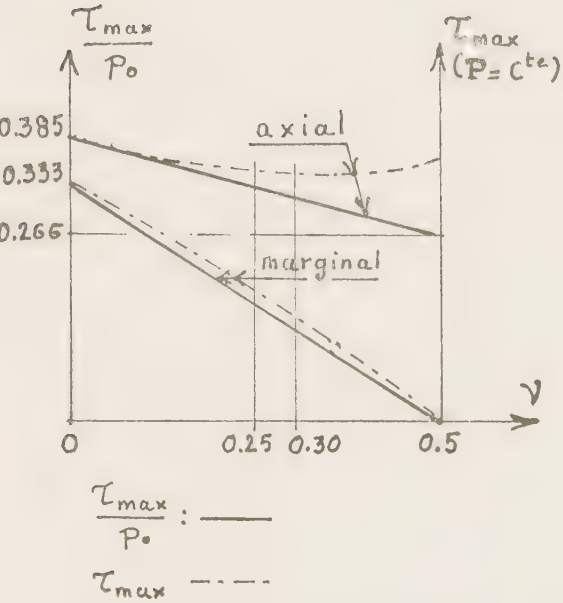
qui, pour des valeurs de ν comprises entre 0,15 et 0,35 donne une précision de 0,2%.

Cisaillement maximal sur l'axe

ν	ζ	τ_{max}/p_o	Formule linéaire approchée
0	0,383	0,3848	0,3810
0,05	0,399	0,3715	0,3692
0,10	0,415	0,3586	0,3573
0,15	0,433	0,3459	0,3455
0,20	0,448	0,3336	0,3336
0,25	0,464	0,3217	0,3218
0,30	0,481	0,3100	0,3099
0,35	0,498	0,2987	0,2981
0,40	0,513	0,2876	0,2862
0,45	0,531	0,2768	0,2744
0,50	0,547	0,2663	0,2625

Le cisaillement maximal en surface est une fonction linéaire rigoureuse de ν :

$$\tau_{max} = \frac{1 - 2\nu}{3} p_o \qquad \text{(au bord du contact)}$$



$\frac{\tau_{max}}{p_o}$: ——

τ_{max} — · — ·

Le diagramme ci-contre montre l'importance relative prise par le cisaillement marginal pour les faibles valeurs de ν.

Il y a lieu cependant de remarquer:

- que les matériaux élastiques usuels ont des coefficients de POISSON compris entre 0,25 et 0,30, soit le $1/10^e$ de la variation extrême,
- que les valeurs du cisaillement comparées ci-dessus sont rapportées à la pression axiale p_o. Si l'on compare le cas de poinçons de charge totale et courbures identiques:

$p_o = \frac{2E}{1-\nu^2} \cdot \frac{a}{\pi R}$, d'où la courbe du cisaillement effectif τ_{max} également portée en trait mixte sur ce même diagramme.

Le cisaillement effectif maximal sur l'axe varie en ce cas trés peu. (-2,2% de $\nu = 0,2$ à $\nu = 0,35$)

0

0 0

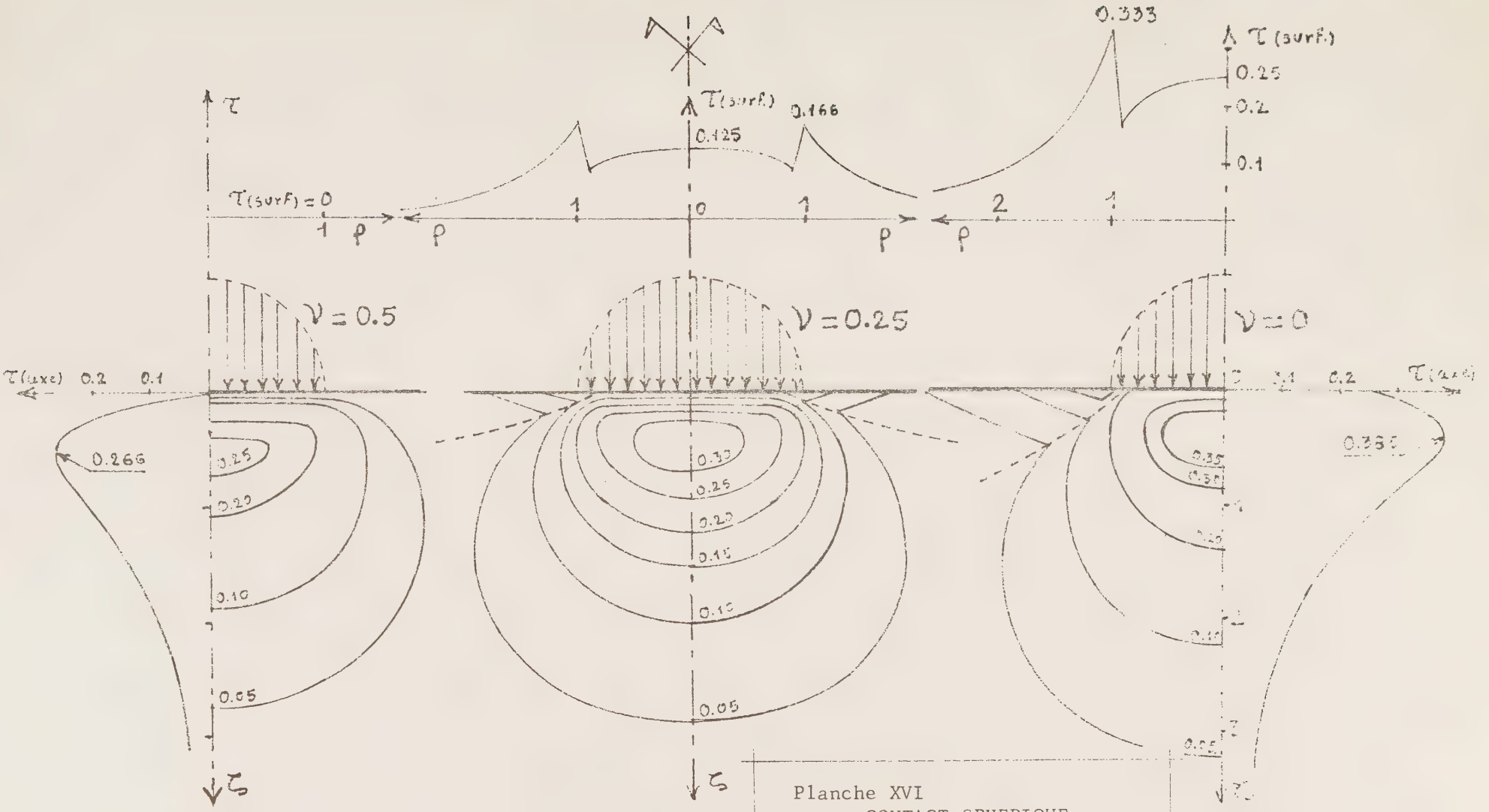


Planche XVI

CONTACT SPHERIQUE

Influence de la variation du coefficient de POISSON sur le Cisaillement Maximal

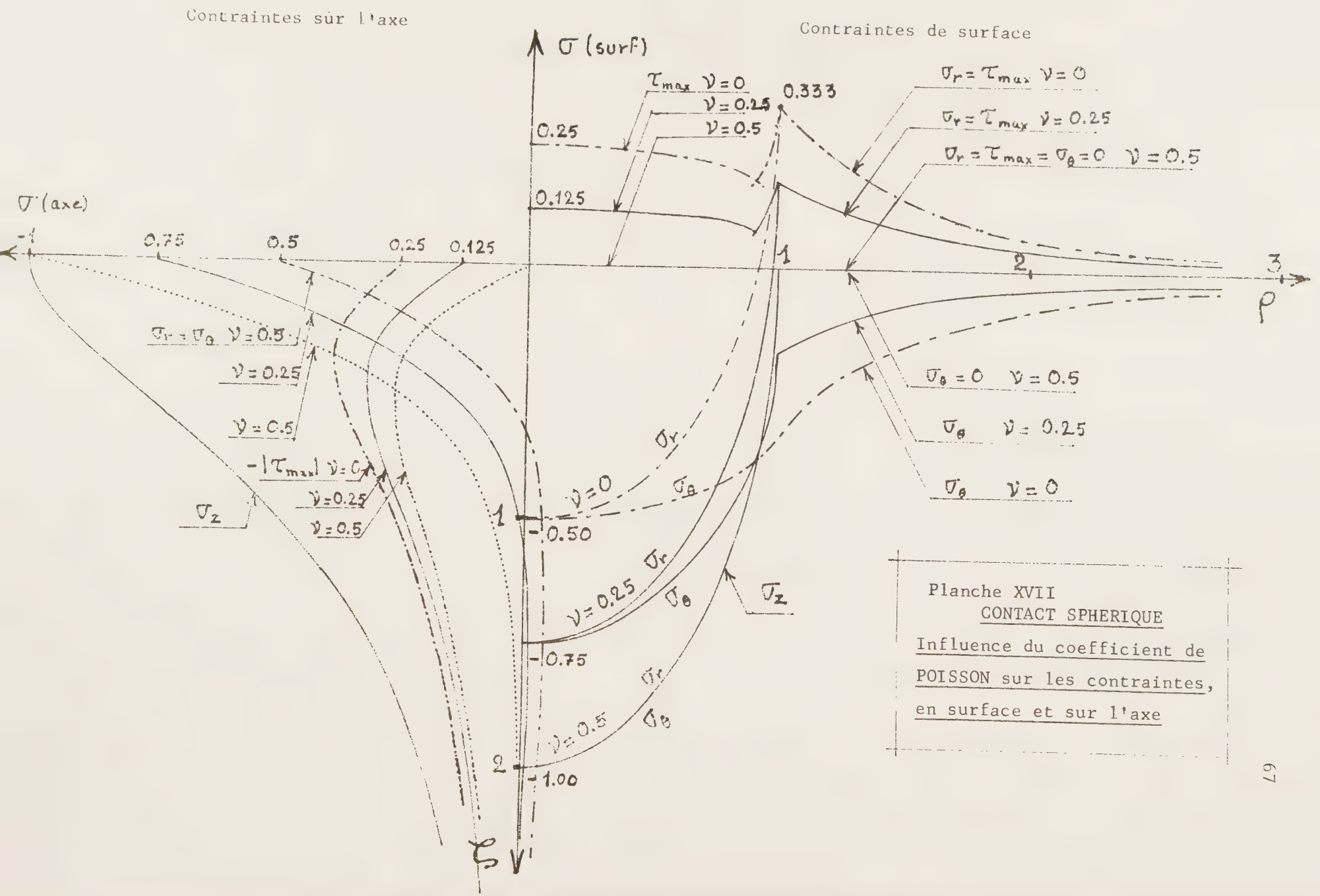


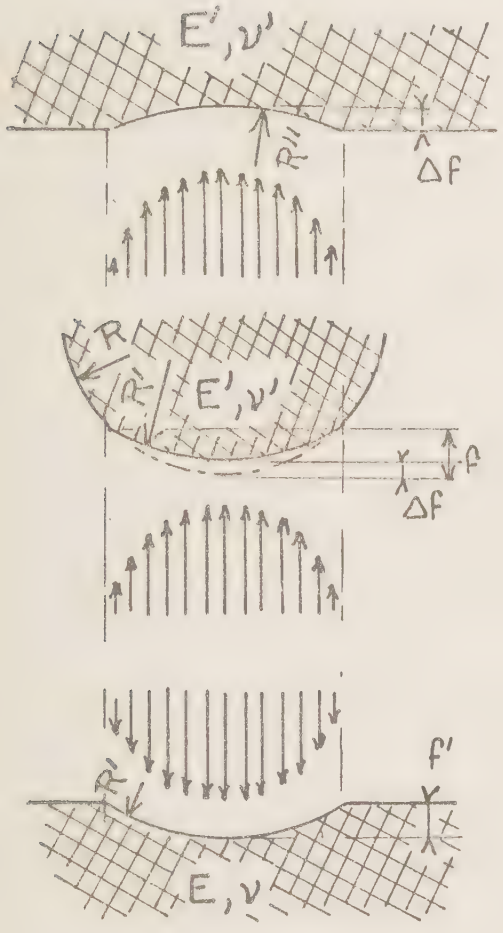
Planche XVII

CONTACT SPHERIQUE

Influence du coefficient de POISSON sur les contraintes, en surface et sur l'axe

F/ - EXTENSION AU CAS DU POINCON ELASTIQUE

Lorsque le rayon de courbure d'un poinçon élastique est trés grand par rapport au rayon de la surface de contact, la déformation normale de la surface au voisinage du contact est équivalente à celle d'un milieu semi-indéfini limité par un plan soumis aux mêmes charges.



Dans ces conditions, une charge normale hémisphérique répartie sur un cercle de rayon a engendre:

. à la surface d'un milieu semi-indéfini limité par un plan, de caractéristiques élastiques E', ν' , une déformation en forme de calotte sphérique de corde 2a, de flèche Δf, de rayon de courbure R'',

. à la surface d'un poinçon sphérique de rayon R et de mêmes caractéristiques E' , ν' , sollicité selon une calotte sphérique de flèche f, une déformée en calotte sphérique de corde 2a, de flèche f-Δf, de rayon de courbure R' ,

(les rayons R, R', R'' étant trés grands devant a, les calottes sphériques envisagées sont équivalentes à des calottes paraboloïdales d'axe vertical, affines entre elles par rapport à leur plan de base)

. à la surface d'un milieu semi-indéfini limité par un plan, de caractéristiques E,ν , une déformée en calotte sphérique de corde 2a, de flèche f'.

Pour une charge totale P donnée, il existe un seul couple de paramètres liés (a, p_o), qui engendre la même flèche, d'où la même déformée sphérique à l'intérieur du cercle de rayon a, sur le poinçon (E',ν'), et sur le milieu (E,ν):

$f' = f-\Delta f$; ce couple a,p_o détermine la solution du problème de contact sous la charge centrale P.

La déformée au contact due au poinçon élastique est donc une calotte sphérique de rayon R'. Le problème est ainsi ramené, pour le

milieu (E,ν), dans la mesure où les déplacements de surface peuvent être négligés (cf IIE ci-dessus), au contact d'un poinçon indéformable de rayon R'.

Un calcul simple donne le rayon R' du poinçon indéformable équivalent:

(Les termes d'ordre supérieur à a^2/R, qui sont ici du 3^e ordre, sont négligés.)

$$f = \frac{a^2}{2R} \qquad f' = f - \Delta f = \frac{a^2}{2R'} \qquad \Delta f = \frac{a^2}{2R''}$$

- d'où $\frac{1}{R''} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$
- pour le milieu E,ν, $p_o = \frac{2E}{1-\nu^2} \cdot \frac{a}{\pi R}$
- pour le milieu E',ν' $p_o = \frac{2E'}{1-\nu'^2} \cdot \frac{a}{\pi R''} = \frac{2E'}{1-\nu'^2} \cdot \frac{a}{\pi} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \right)$

d'où, par élimination de p_o/a :

(33) $$\boxed{R' = R \left(1 + \frac{E}{E'} \cdot \frac{1-\nu'^2}{1-\nu^2} \right)}$$

Le problème du contact d'un poinçon élastique de rayon R, de caractéristiques élastiques E',ν', sur un milieu semi-indéfini limité par un plan, de caractéristiques E,ν, est donc équivalent, pour ce milieu, à celui d'un poinçon indéformable de rayon R' donné par l'expression (33).

Si les deux milieux ont mêmes caractéristiques E,ν, on a en particulier:

$$R' = 2R$$

0

0 0

DEUXIEME PARTIE

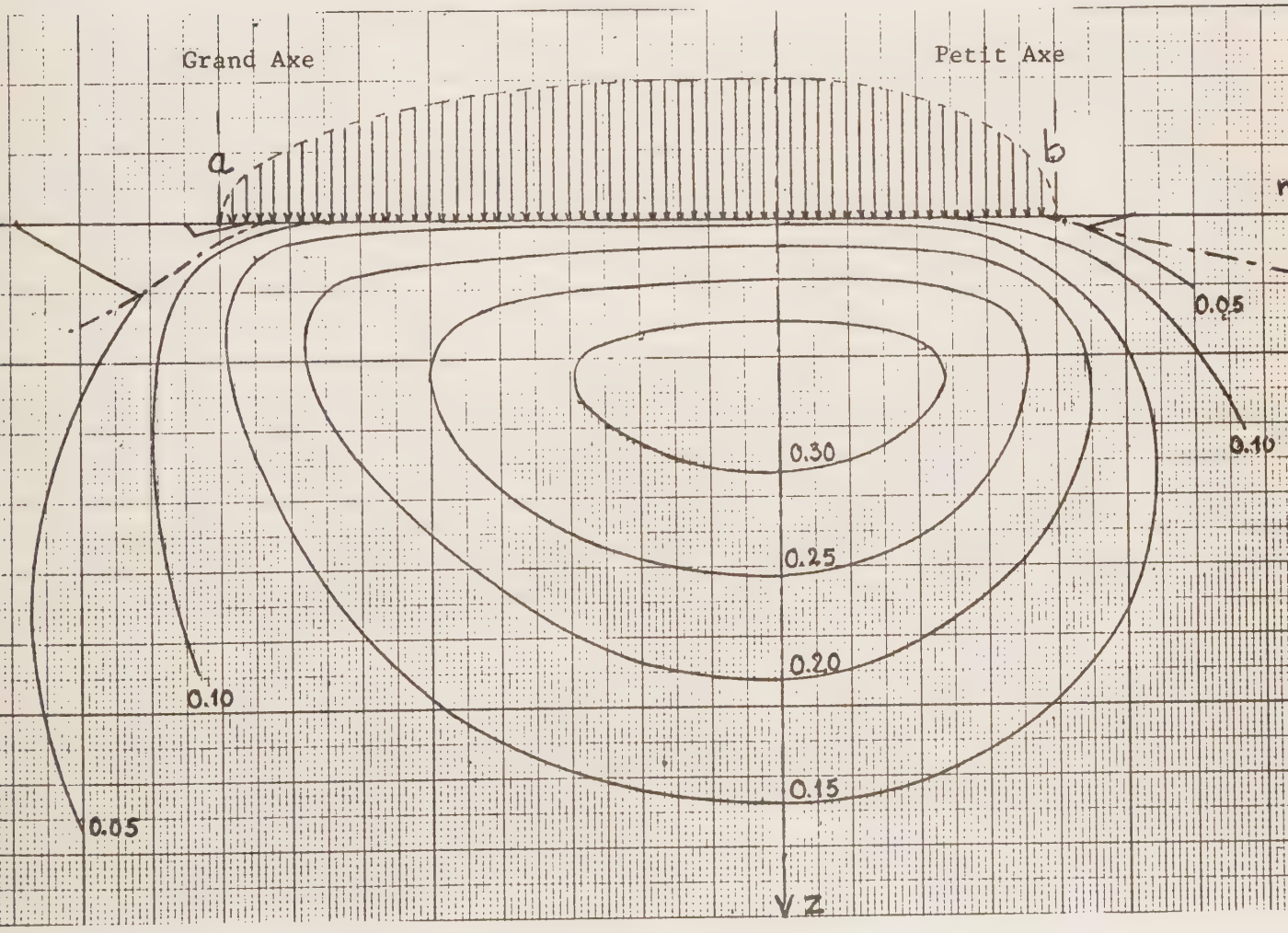
LE CONTACT ELLIPTIQUE

Remarques préliminaires, Objet de la Deuxième Partie

La distribution des contraintes sous un poinçon de contact elliptique reste analogue à celle qui se produit sous le poinçon sphérique: Si l'on fait varier l'excentricité du contact jusqu'à des valeurs élevées, les zônes d'égale sollicitation subissent des distorsions prévisibles selon les deux plans de symétrie, dans le même sens que la déformation d'excentricité de l'ellipse de contact elle-même.

C'est ce que montre par exemple, comparé aux planches VII et VIII, le diagramme ci-dessous des courbes d'égal cisaillement maximal à l'intérieur du milieu élastique soumis à un contact elliptique d'excentricité $k = 0,866$ ou $k' = \frac{b}{a} = 0,5$

Cisaillement maximal, rapporté à la pression axiale p_o
selon les deux plans de symétrie du contact



Ce diagramme a été construit à partir des valeurs numériques données dans l'étude de BESSELING, VAN BOMMEL et TEN HOEVE pour les points situés à l'intérieur du milieu élastique, complétées par les valeurs calculées en surface et quelques considération de continuité à partir des résultats du poinçon sphérique.

Afin d'étudier plus précisément l'influence de l'excentricité du contact sur la répartition des contraintes, une étude systématique pourrait être faite ~~à partir~~ à partir des expressions explicites établies par les mêmes auteurs et rapportées à l'annexe N°4.

Une telle étude donnerait lieu toutefois à des calculs assez importants sans résultats apparemment essentiels,et l'on vérifie par contre sur l'exemple étudié:

- que les sollicitations extrêmales restent situées en surface et sur l'axe normal
- que la distorsion des courbes d'égale sollicitation est, qualitativement, en corrélation simple avec la déformation d'excentricité de l'ellipse de contact.

Il suffira par suite, pour étudier les conséquences les plus significatives de l'influence de l'excentricité, d'examiner simultanément cette influence sur les contraintes de surface et les contraintes sur l'axe, la modification de la distribution à l'intérieur du milieu élastique s'en déduisant par continuité, et pouvant être calculée, si nécessaire, dans chaque cas particulier.

L'étude de la distribution des contraintes en surface selon les axes du contact ainsi que sur l'axe normal pour différentes valeurs de l'excentricité, et la comparaison de ces résultats à ceux du poinçon sphérique, font l'objet principal de cette deuxième partie de la présente thèse.

o

o o

CHAPITRE I

TENSIONS DE SURFACE
SELON LES AXES DU CONTACT

A - Principe du calcul

Le contact normal elliptique sur un milieu élastique semi-indéfini limité par un plan est le contact le plus général d'un poinçon limité par une surface convexe quelconque, sous les réserves suivantes :

- les forces de contact se réduisent à une force normale unique passant par le centre de la surface de contact.
- les rayons de courbure principaux de la surface du poinçon au contact sont grands devant les dimensions de l'aire de contact. Cette condition est toujours satisfaite dans le domaine élastique pour les matériaux usuels. Les conditions du problème sont donc les mêmes pour une surface quelconque, et pour toute surface qui lui est osculatrice au point de contact, la plus simple étant le paraboloïde elliptique d'axe normal au plan limite, d'où la désignation de " problème du poinçon paraboloïdal sous charge centrale ".

Comme dans le problème du poinçon sphérique (cf. 1ère partie II E 2°) les composantes tangentielles des forces de contact sont négligeables, et les études de HERTZ ont montré :

- que la surface de contact était limitée par un ellipse
- que le diagramme de distribution de la pression avait la forme d'un demi ellipsoïde.

a et b désignant les demi-diamètres de l'ellipse de contact, et p_o la pression au centre, la répartition de la pression selon les axes a ainsi pour expressions :

- selon le grand axe : $p = -\sigma_z = p_o \sqrt{1 - \frac{r^2}{a^2}}$ $\qquad r \leq a$

- selon le petit axe : $p = -\sigma_z = p_o \sqrt{1 - \frac{r^2}{b^2}}$ $\qquad r \leq b$

Les isobares sont des ellipses concentriques semblables.

D'où la méthode de calcul des contraintes selon les axes par intégration de la solution de BOUSSINESQ :

- effet d'une charge uniformément répartie sur une couronne elliptique d'épaisseur élémentaire (intégration le long d'une isobare).
- application à la couronne de révolution. Le résultat simple obtenu s'étend, indépendamment du problème de contact, à toute charge de révolution.
- effet du contact elliptique (intégration totale du diagramme de charge).

B - Effet d'une charge uniformément répartie sur une couronne elliptique d'épaisseur élémentaire.

1) Notations (cf. Figure page suivante)

. Nous appellerons couronne elliptique (Γ) d'épaisseur élémentaire la surface obtenue en effectuant sur une couronne circulaire (C) de rayon a , d'épaisseur da , une affinité de rapport k' par rapport à un diamètre OX , devenant dans la figure transformée l'axe d'observation.

- Ω' aire de la couronne elliptique (Γ)
- Ω aire de la couronne circulaire (C)
- P point d'observation de coordonnées cylindriques r z θ ($\theta = 0$ ou π) par rapport au centre O de la couronne.

- B'_1 ou B'_2 (affines de B_1 et B_2) points de source sur la surface chargée.
- $(\sigma_r)_s$, $(\sigma_z)_s$, $(\sigma_\theta)_s$ ..... composantes de contraintes en P , en coordonnées cylindriques rapportées au point de source.
- λ'_1 , λ'_2 rayon semi-polaire du point P par rapport au point source B'_1 ou B'_2 pris pour origine.
- R rayon polaire du point P par rapport au point de source.
- $(\sigma_r)_o$, $(\sigma_z)_o$, $(\sigma_\theta)_o$ ..... ou seulement : σ_r , σ_z , σ_θ ... composantes de contraintes au point P en coordonnées cylindriques rapportées au centre O de la couronne.

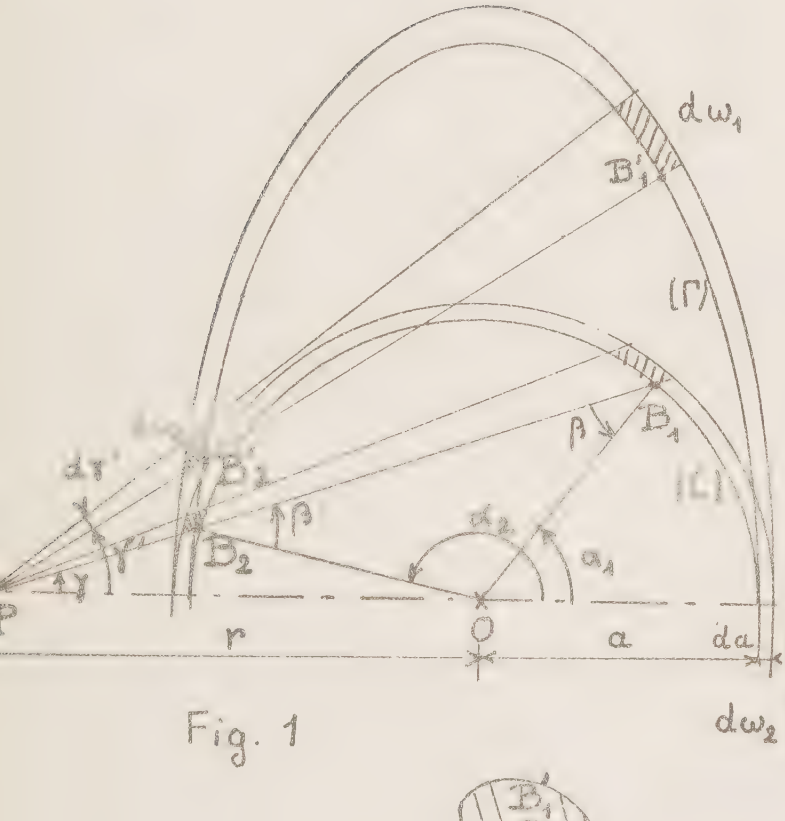


Fig. 1

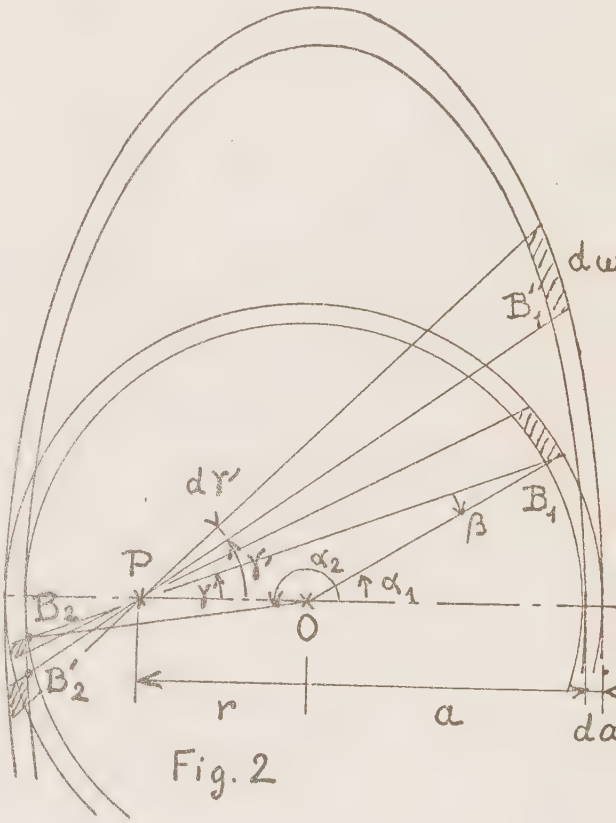


Fig. 2

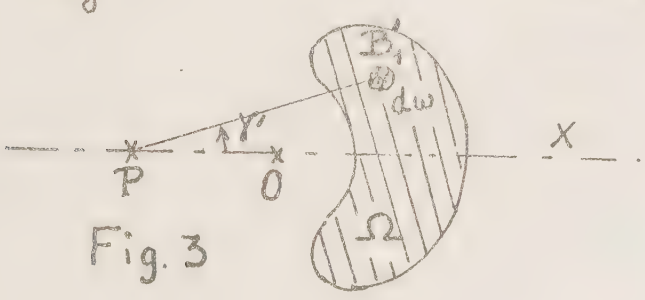


Fig. 3

2) Effet d'une charge répartie symétrique par rapport à OX

(p. 75 Figure 3)

Supposons le point P infiniment voisin de la surface dans le milieu élastique : $z \neq 0$.

La valeur limite de σ_z lorsque $z \Rightarrow 0$ est connue :

$(\sigma_z)_{z=0} = 0$ en dehors de la surface de charge

$(\sigma_z)_{z=0} = -p$ sur la surface de charge.

Une charge élémentaire $p d\omega$ en B_1' engendre en P, selon la solution de BOUSSINESQ, les contraintes radiale et orthoradiale ci-après :

$$(100)\quad \begin{cases} (\sigma_r)_s = \dfrac{p d\omega}{2\pi}\left[-\dfrac{3\lambda^2 z}{R^5} + (1-2\nu)\left(-\dfrac{z}{\lambda^2 R} + \dfrac{1}{\lambda^2}\right)\right] \\ (\sigma_\theta)_s = \dfrac{p d\omega}{2\pi}(1-2\nu)\left(-\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{z}{\lambda^2 R} + \dfrac{z}{R^3}\right) \end{cases}$$

Si P est en dehors de la surface de charge, et que l'on fasse tendre z vers 0, R et λ restent finis, $R \sim \lambda$, et pour $z = 0$

$$(101)\quad \begin{cases} (\sigma_r)_s = \dfrac{p d\omega}{2\pi}(1-2\nu).\dfrac{1}{\lambda^2} \\ (\sigma_\theta)_s = -\dfrac{p d\omega}{2\pi}(1-2\nu).\dfrac{1}{\lambda^2} \end{cases}$$

Par suite de la symétrie, ces contraintes sont principales et la charge élémentaire engendre en P un état de cisaillement simple.

Si l'on intègre l'effet de la charge sur la surface Ω, l'état de contraintes reste de cisaillement simple par superposition, et la direction OX est principale par symétrie.

Il suffit donc d'intégrer la composante normale de contrainte selon OX pour obtenir la contrainte principale radiale $(\sigma_r)_o$, avec $(\sigma_\theta) = -(\sigma_r)_o$

D'où, en P, après simplification :

(102) $$\sigma_r = -\sigma_\theta = \frac{1-2\nu}{2\pi} \iint_\Omega \frac{\cos 2\gamma'}{\lambda^2} \, p\,d\omega$$

Si le point P est situé sur la surface de charge, les expressions (100) restent finies à la limite mais les simplifications (101) et (102) ne sont plus applicables au voisinage de P .

3) Effet de la charge uniformément répartie sur la couronne elliptique.

L'intégration sera faite en prenant en compte simultanément l'effet des éléments d'aire chargée $d\omega'_1$ et $d\omega'_2$ vus de P sous l'angle $d\gamma'_1$ (cf. p. 71 Figures 1 et 2)

$$d\omega = d\omega'_1 + d\omega'_2$$

obtenus par affinité à partir des éléments correspondants de la couronne circulaire :

$$d\omega = k' \, (d\omega_1 + d\omega_2)$$

La relation (102) devient :

$$\sigma_r = \frac{p}{2\pi} (1-2\nu) \iint_{\Omega'} \cos 2\gamma' \left(\frac{d\omega'_1}{\lambda'^2_1} + \frac{d\omega'_2}{\lambda'^2_2} \right)$$

Par suite de l'affinité
$$\begin{cases} \operatorname{tg} \gamma' = k' \operatorname{tg} \gamma \\ \lambda'^2 = \lambda^2 \cdot \dfrac{1 + k'^2 \operatorname{tg}^2 \gamma}{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma} \end{cases}$$

D'où l'intégrale sur la couronne circulaire :

(103) $$\sigma_r = \frac{p}{2\pi} (1-2\nu) \, k' \iint_\Omega \frac{(1+\operatorname{tg}^2\gamma)(1-k'^2\operatorname{tg}^2\gamma)}{(1+k'^2\operatorname{tg}^2\gamma)^2} \left(\frac{d\omega_1}{\lambda_1^2} + \frac{d\omega_2}{\lambda_2^2} \right)$$

a) Point P extérieur à la couronne : $r > a + da$ (p. 71 Fig. 1)

De considérations géométriques élémentaires :

$$d\omega_1 = a\, da\, d\alpha_1 \qquad d\alpha_1 = d\beta + d\gamma$$

$$d\omega_2 = -a\, da\, d\alpha_1 \qquad d\alpha_2 = -d\beta + d\gamma$$

(104) $$\frac{\sin\gamma}{a} = \frac{\sin\beta}{r} \Rightarrow d\gamma = \frac{a\cos\beta}{r\cos\gamma}\, d\beta$$

$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} d\alpha_1 = \dfrac{r\cos\gamma + a\cos\beta}{r\cos\gamma} = \dfrac{\lambda_1}{r\cos\gamma}\, d\beta \\ \\ d\alpha_2 = \dfrac{-r\cos\gamma + a\cos\beta}{r\cos\gamma} = -\dfrac{\lambda_2}{r\cos\gamma}\, d\beta \end{array} \right.$$

Avec $\lambda_1 + \lambda_2 = 2r\cos\gamma$ et $\lambda_1\lambda_2 = r^2 - a^2$, il vient :

$$\sigma_r = \frac{p\, a\, da}{\pi(r^2-a^2)}(1-2\nu)\, k' \int_{(C)} \frac{(1+tg^2\gamma)(1-k'^2tg^2\gamma)}{(1+k'^2tg^2\gamma)^2}\, d\beta$$

Soit, après élimination de γ par (104) et simplifications :

$$\sigma_r = \frac{2\, p\, a\, da}{\pi(r^2-a^2)}(1-2\nu)\, k' \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - (1+k')\frac{a^2}{r^2}\sin^2\beta}{\left[1-(1-k'^2)\frac{a^2}{r^2}\sin^2\beta\right]^2}\, d\beta$$

Cette intégrale s'exprime en fractions rationnelles de $tg\,\beta$, d'où, après décomposition et intégration, on obtient, toutes réductions faites :

(105) $$\sigma_r = (1-2\nu)\, \frac{k'\, p\, a\, da}{r^2\left[1-(1-k'^2)\frac{a^2}{r^2}\right]^{3/2}}$$

Ce calcul est valable pour $k' < 1$ ou $k' > 1$; toutefois pour conserver un même paramètre selon les deux axes de l'ellipse :

- selon le grand axe le rapport d'affinité $\frac{b}{a} < 1$ conservera la désignation de k', et l'on posera :

$$k = \sqrt{1-k'^2} \qquad \text{d'où}$$

$$(106) \quad \sigma_r = (1-2\nu)\sqrt{1-k^2} \cdot \frac{p\ a\ d\ a}{r^2\left(1-k^2\frac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}}$$

- selon le petit axe, le rapport d'affinité devient $\frac{1}{k'}$, d'où

$$(107) \quad \sigma_r = \frac{1-2\nu}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \frac{p\ b\ d\ b}{r^2\left[1+\frac{k^2}{1-k^2}\ \frac{b^2}{r^2}\right]^{3/2}}$$

Extension au cas d'une aire elliptique uniformément chargée

L'intégration des formules (106) et (107) sur une ellipse de demi-axes a_o et b_o est immédiate et donne pour expression des contraintes en un point extérieur situé sur les axes :

$$(108) \quad \left|\begin{array}{l} \text{grand axe : } \sigma_r = -\sigma_\theta = (1-2\nu)\ p\ \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-k^2\frac{a_o^2}{r^2}}} - 1\right) \\ \\ \text{petit axe : } \sigma_r = -\sigma_\theta = (1-2\nu)\ p\ \frac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\frac{k^2}{1-k^2}\ \frac{b_o^2}{r^2}}}\right) \end{array}\right.$$

En particulier, aux sommets des axes :

$$(109) \quad \left|\begin{array}{l} \text{- sommet du grand axe : } \sigma_r = -\sigma_\theta = \frac{(1-2\nu)\ p}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{(1-2\nu)\ p}{1+k'} \\ \\ \text{- sommet du petit axe : } \sigma_r = -\sigma_\theta = \frac{(1-2\nu)\ \sqrt{1-k^2}\ p}{1+\sqrt{1-k^2}} = \frac{(1-2\nu)k'p}{1+k'} \end{array}\right.$$

b) Point P intérieur à la couronne : $r < a$

Mêmes relations géométriques qu'au § a, sauf :

$$d\omega_2 = +\ a\ da\ d\alpha_2 \qquad \text{et} \qquad \lambda_1\ \lambda_2 = a^2 - r^2$$

$$d\alpha_2 = +\ \frac{\lambda_2}{r\cos\gamma} \qquad \lambda_1 + \lambda_2 = 2\ a\cos\beta$$

$$\text{d'où : } \sigma_r = \frac{p\ a\ d\ a}{\pi\ (a^2-r^2)}\ (1-2\nu)k' \cdot \int \frac{(1+tg^2\gamma)(1-k'^2\ tg^2\gamma)}{(1+k'^2\ tg^2\gamma)^2}\ \frac{a\cos\beta}{r\cos\gamma}\ d\beta$$

or, d'après (104) : $\frac{a \cos \beta}{r \cos \gamma} d\beta = d\gamma$; en posant $tg\ \gamma' = t$

$$\int_{(C)} \frac{(1 + tg^2\gamma)(1 - k'^2 tg^2\gamma)}{(1 + k'^2\ tg^2\ \gamma)^2} d\gamma = \int_{(\Gamma)} \frac{1 - t^2}{(1 + t^2)^2} dt$$

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{1 - t^2}{(1+t^2)^2} dt \ .$$ Cette intégrale est nulle.

$$\boxed{\sigma_r = - \sigma_\theta = 0}$$

Pour tout point de l'axe intérieur à la couronne, le tenseur des contraintes est nul.

c) Point P situé sur la couronne

Pour un point situé sur la couronne, les contraintes restent finies lorsque $d\ a \longrightarrow 0$.

En effet, le rayon de courbure devenant très grand devant $d\ a$, on est ramené au problème à deux dimensions d'une bande rectiligne indéfinie uniformément chargée ; pour un point situé sur cette bande :

(110)
$$\left|\begin{array}{ll} \sigma_z = - p & \\ \sigma_r = \sigma_z = - p & (\sigma_r \text{ normal à la bande chargée}) \\ \sigma_\theta = - 2\ \nu\ p & (\sigma_\theta \text{ dans le sens de la bande chargée}) \end{array}\right.$$

C - Cas particulier de la couronne circulaire. Extension au cas d'une charge de révolution quelconque.

Pour une couronne circulaire, l'expression (105) devient, avec $k' = 1$:

$$\sigma_r = - \sigma_\theta = (1 - 2\ \nu) \frac{p\ a\ d\ a}{r^2}$$ pour un point extérieur

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0$$ pour un point intérieur.

1°) Point extérieur

Ce résultat s'étend immédiatement au cas d'une charge de révolution quelconque située à l'intérieur d'un cercle de charge de rayon a, avec $r > a$.

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = -\frac{1-2\nu}{r^2} \iint_\Omega p\,a\,d\,a = -\frac{1-2\nu}{2\pi r^2} \iint_\Omega 2\pi\,p\,a\,d\,a$$

Or $\iint_\Omega 2\pi\,p\,a\,d\,a$ est la charge totale P située à l'intérieur du cercle.

(111)
$$\sigma_r = -\sigma_\theta = \frac{P(1-2\nu)}{2\pi r^2}$$

Une charge à symétrie de révolution située à l'intérieur d'un cercle de charge de rayon a engendre en surface, en dehors de ce cercle, un état de contraintes de cisaillement simple ; cet état de contraintes ne dépend que du rayon polaire et de la charge totale P, il est en particulier le même que celui qui serait produit par une charge P rigoureusement concentrée placée au centre O (problème de BOUSSINESQ cf. formule (101) ci-dessus).

2°) Point intérieur

Pour un point M de rayon polaire r situé à l'intérieur d'une charge de révolution de rayon a_o ($r < a_o$), 3 types de charges sont à considérer :

- les charges situées sur la couronne extérieure à M : $r < a < a_o$ dont l'effet est nul.
- les charges situées sur la couronne d'épaisseur nulle comprenant le point M de densité superficielle p (contraintes principales données par les expressions 110).
- les charges situées à l'intérieur du cercle de rayon r, de résultante P_r (contraintes principales σ_r, σ_θ données par la formule 111, avec $\sigma_z = 0$)

D'où par superposition :

$$(112)\qquad \left|\begin{array}{l} \sigma_z = -\,p \\ \sigma_r = -\,p + \dfrac{P_r\,(1-2\nu)}{2\pi r^2} \qquad \text{avec } P_r = 2\pi \int_0^r p\,a\,da \\ \sigma_\theta = -\,2\nu\,p - \dfrac{P_r\,(1-2\nu)}{2\pi r^2} \end{array}\right.$$

3°) Problèmes de révolution particuliers :

a) charge uniformément répartie sur un cercle de rayon a
(problème de TEREZAWA)

Les formules (111) et (112) donnent immédiatement les contraintes superficielles :

$$(113)\qquad \left|\begin{array}{ll} \text{Point extérieur} & \left|\begin{array}{l} \sigma_z = 0 \\ \sigma_r = -\,\sigma_\theta = (1-2\nu)\,\dfrac{a^2}{2r^2} \end{array}\right. \\ \text{Point intérieur} & \left|\begin{array}{l} \sigma_z = p \\ \sigma_r = \sigma_\theta = -\,\dfrac{1-2\nu}{2}\,p \end{array}\right. \end{array}\right.$$

b) Poinçon sphérique : avec $p = p_o \sqrt{1 - \frac{a^2}{r^2}}$, on obtient par (111) et (112) l'expression des contraintes de surface trouvées dans la première partie (expressions 26 et 27).

D - Charge à symétrie elliptique, contact elliptique

Nous appellerons charge à symétrie elliptique une charge normale répartie dont les isobares sont des ellipses concentriques semblables.

La densité de charge est fonction du rayon polaire, soit $p = \varphi_1(\frac{r}{a})$ sur le grand axe, ou $\varphi\,(\frac{r}{b})$ sur le petit axe.

Les contraintes principales selon les axes s'obtiennent en intégrant les valeurs trouvées pour l'anneau élémentaire :

- sur toute l'ellipse chargée pour le cas d'un point extérieur à cette ellipse

- sur l'ellipse concentrique passant par le point M considéré (ellipse intérieure) pour un point intérieur, en y ajoutant les contraintes dues à l'anneau d'épaisseur nulle passant par M .

Ce problème ne présente à première vue que deux applications intéressantes :

- le cas de l'ellipse uniformément chargée (problème de WAY et de DERESIEWICZ)
- le cas du contact elliptique ($p = p_o \sqrt{1 - \rho^2}$)

1°) Ellipse uniformément chargée

a) point extérieur : ce cas a été calculé précédemment (expressions 108, avec $\sigma_z = 0$)

b) point intérieur :

Les contraintes dues à l'ellipse"intérieure" sont données par les expressions (109), d'où, en superposant l'effet de l'anneau d'épaisseur nulle :

(114)

Sur le grand axe

$$\sigma_z = p$$

$$\sigma_r = \frac{(1 - 2\nu)p}{1 + k'} - p = -\frac{2\nu + k'}{1 + k'} p$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(1 - 2\nu)p}{1 + k'} - 2\nu p = -\frac{1 + 2\nu k'}{1 + k'} p$$

Sur le petit axe

$$\sigma_z = p$$

$$\sigma_r = \frac{(1 - 2\nu)k'p}{1 + k'} - p = -\frac{1 + 2\nu k'}{1 + k'} p$$

$$\sigma_\theta = -\frac{(1 - 2\nu)k'p}{1 + k'} - 2\nu p = -\frac{2\nu + k'}{1 + k'} p$$

Résultats conformes aux études antérieures.

2°) Contact elliptique

L'ellipse de contact ayant pour demi-diamètres a_o et b_o , la densité de charge sur un anneau elliptique isobare (a , b) est :

$$p = p_o \sqrt{1 - \frac{a^2}{a_o^2}} = p_o \sqrt{1 - \frac{b^2}{b_o^2}} \qquad (115)$$

a) Conduite des calculs :

. Point extérieur sur le grand axe. (de rayon polaire $r > a_o$)
D'après (106) et pour la valeur de p ci-dessus :

$$(116)\qquad \left|\begin{array}{l} \sigma_r = (1 - 2\nu)\sqrt{1 - k^2}\displaystyle\int_0^{a_o} \frac{p\,a\,d\,a}{r^2\left(1 - k^2\frac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}} \\ \\ \sigma_\theta = -\sigma_r \qquad\qquad \sigma_z = 0 \end{array}\right.$$

Etat de cisaillement simple

. Point intérieur sur le grand axe :

$$(117)\qquad \left|\begin{array}{l} \sigma_r = (1 - 2\nu)\sqrt{1 - k^2}\displaystyle\int_0^{r} \frac{p\,a\,d\,a}{r^2\left(1-k^2\frac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}} - p_o\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_o^2}} \\ \\ \sigma_\theta = -\sigma_r - p_o\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_o^2}} - 2\nu\, p_o\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_o^2}} = -\sigma_r - (1 + 2\nu)p_o\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_o^2}} \\ \\ \sigma_z = -p_o\sqrt{1 - \frac{r^2}{a_o^2}} \end{array}\right.$$

. Point extérieur sur le petit axe $r > b_o$, d'après (107)

$$(118)\qquad \left|\begin{array}{l} \sigma_r = \dfrac{(1 - 2\nu)}{\sqrt{1 - k^2}}\displaystyle\int_0^{b_o} \frac{p\,b\,d\,b}{r^2\left(1 + \frac{k^2}{1 - k^2}\,\frac{b^2}{r^2}\right)^{3/2}} \\ \\ \sigma_\theta = -\sigma_r \qquad\qquad \sigma_z = 0 \end{array}\right.$$

Cisaillement simple

• Point intérieur sur le petit axe $r < b_o$

$$(119)\quad \left|\begin{array}{l} \sigma_r = \dfrac{1-2\nu}{\sqrt{1-k^2}} \displaystyle\int_0^r \frac{p\, b\, d\, b}{r^2\left(1+\dfrac{k^2}{1-k^2}\,\dfrac{b^2}{r^2}\right)^{3/2}} - p_o \sqrt{1-\dfrac{r^2}{b_o^2}} \\ \sigma_\theta = -\sigma_r - (1+2\nu) \sqrt{1-\dfrac{r^2}{b_o^2}} \\ \sigma_z = -p_o \sqrt{1-\dfrac{r^2}{b_o^2}} \end{array}\right.$$

b) Intégrations

Pour les intégrales intervenant dans les expressions (116) et (117) :

$$(120)\quad I = \int_0^{a_1} \frac{p\, a\, d\, a}{r^2\left(1-k^2\,\dfrac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}} = p_o \int_0^{a_1} \frac{\left(1-\dfrac{a^2}{a_o^2}\right)^{1/2} a\, d\, a}{r^2\left(1-k^2\,\dfrac{a^2}{r^2}\right)^{3/2}}$$

avec $a_1 = a_o$

ou $a_1 = r$

Le changement de variable

$$t = k\sqrt{\frac{a_o^2 - a^2}{r^2 - k^2\, a^2}}$$

conduit à une intégrale simple de fractions rationnelles :

$$(121)\quad I = -\frac{p_o r}{k^3 a_o} \int_{t_o}^{t_1} \frac{t^2}{1-t^2}\, dt$$

L'examen de l'expression de t montre que :

$t < 1$ pour $\dfrac{r}{a_o} > k$

$t > 1$ pour $\dfrac{r}{a_o} < k$

Si $\dfrac{r}{a_o} = k$, le changement de variable ci-dessus n'est pas

possible mais l'expression (120) se réduit à $p_o r \int_0^{a_1} \frac{a\,da}{r^2 - k^2 a^2}$, dont l'intégration est immédiate.

Il y a donc 3 expressions différentes selon que $\frac{r}{a_o} \gtrless K$

Pour les intégrales des expressions 118 et 119 :

$$I' = \int_0^{b_1} \frac{p\,b\,d\,b}{r^2\left(1 + \frac{k^2}{1-k^2}\,\frac{b^2}{r^2}\right)^{3/2}} = p_o \int_0^{b_1} \frac{\left(1 - \frac{b^2}{b_o^2}\right)^{1/2} b\,d\,b}{r^2\left(1 + \frac{k^2}{1-k^2}\,\frac{b^2}{r^2}\right)^{3/2}} \quad ,$$

nous poserons de façon analogue :

$$t = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}} \cdot \sqrt{\frac{b_o^2 - b^2}{r^2 + \frac{k^2}{1-k^2}\,b^2}} \quad , \qquad \text{d'où après réductions :}$$

(121) $$I' = - \frac{p_o r}{a_o} \cdot \frac{(1-k^2)^{3/2}}{k^3} \int_{t_o}^{t_1} \frac{t^2}{1+t^2}\,dt$$

c) Expression des résultats (cas général)

Après intégration de (120) et (121) et report dans les expressions (116), (117), (118), (119), on obtient les valeurs des contraintes principales selon les deux axes, récapitulées ci-après, toutes réductions faites :

les demi-axes de l'ellipse de contact sont ici désignés par a et b . Excentricité :

$$k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Le point d'observation M est défini par son rayon semi-polaire réduit : $\rho = \frac{r}{a}$ ou $\frac{r}{b}$ selon l'axe considéré :

1 - Point d'observation situé sur le grand axe $\rho = \frac{r}{a}$

α) Point extérieur $\rho \geq 1$

$$(122)\quad \begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \sigma_r = p_o\ (1-2\ \nu)\ \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\ \left(\dfrac{\rho}{k}\ \text{Argth}\ \dfrac{k}{\rho} - 1\right) \\ \sigma_\theta = -\ \sigma_r \end{cases}$$

β) Sommet du grand axe $\rho = 1$

$$(123)\quad \begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \sigma_r = p_o\ (1-2\ \nu)\ \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\ \left(\dfrac{1}{k}\ \text{Argth}\ k - 1\right) \\ \sigma_\theta = 0 \end{cases}$$

γ) Point intérieur

γ_1) $k \leq \rho \leq 1$

$$(124)\quad \begin{cases} \sigma_z = -\ p_o\ \sqrt{1-\rho^2} \\ \sigma_r = p_o(1-2\nu)\ \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\left\{\dfrac{\rho}{k}\left[\text{Argth}\ \dfrac{k}{\rho} - \text{Argth}\left(\dfrac{k}{\rho}\sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{1-k^2}}\right)\right] - 1 \right. \\ \qquad \left. + \sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{1-k^2}}\right\} - p_o\ \sqrt{1-\rho^2} \\ \sigma_\theta = -\ p_o(1-2\nu)\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\left\{\dfrac{\rho}{k}\left[\text{Argth}\ \dfrac{k}{\rho} - \text{Argth}\left(\dfrac{k}{\rho}\sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{1-k^2}}\right)\right] - 1 \right. \\ \qquad \left. + \sqrt{\dfrac{1-\rho^2}{1-k^2}}\right\} - 2\ \nu\ p_o\sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

γ_2) $\rho = k$

$$(125)\quad \begin{cases} \sigma_z = - p_o \sqrt{1 - \rho^2} \\ \sigma_r = - p_o \, (1-2\,\nu) \, \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2} \, \text{Log} \, \sqrt{1 - k^2} \; - p_o \, \sqrt{1 - k^2} \\ \sigma_\theta = p_o \, (1-2\,\nu) \, \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2} \, \text{Log} \, \sqrt{1 - k^2} - 2\,\nu\, p_o \, \sqrt{1 - k^2} \end{cases}$$

γ_3) $\rho \leq k$

$$(126)\quad \begin{cases} \sigma_z = - p_o \sqrt{1 - \rho^2} \\ \sigma_r = p_o(1-2\nu) \, \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2} \left\{ \dfrac{\rho}{k} \left[\text{Argth} \, \dfrac{\rho}{k} - \text{Argth} \left(\dfrac{\rho}{k} \sqrt{\dfrac{1-k^2}{1-\rho^2}} \right) \right] - 1 \right. \\ \qquad \left. + \sqrt{\dfrac{1-k^2}{1-\rho^2}} \right\} - p_o \sqrt{1 - \rho^2} \\ \sigma_\theta = - p_o(1-2\nu) \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2} \left\{ \dfrac{\rho}{k} \left[\text{Argth} \, \dfrac{\rho}{k} - \text{Argth} \left(\dfrac{\rho}{k} \sqrt{\dfrac{1-k^2}{1-\rho^2}} \right) \right] - 1 \right. \\ \qquad \left. + \sqrt{\dfrac{1-k^2}{1-\rho^2}} \right\} - 2\,\nu\, p_o \sqrt{1-\rho^2} \end{cases}$$

γ_4) $\rho = 0$ (centre du contact)

$$(127)\quad \begin{cases} \sigma_z = - p_o \\ \sigma_r = - p_o \, \dfrac{2\,\nu + \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} \qquad \text{(cf. formules 114)} \\ \sigma_\theta = - p_o \, \dfrac{1 + 2\,\nu \, \sqrt{1 - k^2}}{1 + \sqrt{1 - k^2}} \end{cases}$$

2) Point d'observation situé sur le petit axe $\rho = \dfrac{r}{b}$

α) point extérieur $\rho \geq 1$

$$(128)\quad \begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \sigma_r = - \sigma_\theta = p_o \, (1-2\nu) \, \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2} \left[1 - \rho \, \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k} \, \text{Arctg} \, \dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}} \right] \end{cases}$$

β) Sommet du petit axe $\rho = 1$

$$(129)\quad \left|\begin{array}{l} \sigma_z = 0 \\ \sigma_r = -\sigma_\theta = p_o(1-2\nu)\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\left[1 - \dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\ \text{Arctg}\ \dfrac{k}{\sqrt{1-k^2}}\right] \end{array}\right.$$

γ) Point intérieur $\rho \leq 1$

$$(130)\quad \left|\begin{array}{l} \sigma_z = -p_o\sqrt{1-\rho^2} \\ \sigma_r = p_o(1-2\nu)\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\left\{\rho\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}\left[\text{Arctg}\left(\dfrac{k}{\rho}\sqrt{1-\rho^2}\right) - \text{Arctg}\dfrac{k}{\rho\sqrt{1-k^2}}\right]\right. \\ \qquad \left. + 1 - \sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2)}\right\} - p_o\sqrt{1-\rho^2} \\ \sigma_\theta = -p_o(1-2\nu)\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k^2}\left\{\rho\dfrac{\sqrt{1-k^2}}{k}\left[\text{Arctg}\left(\dfrac{k}{\rho}\sqrt{1-\rho^2}\right)\right.\right. \\ \left.\left. - \text{Arc tg}\dfrac{k}{\rho\sqrt{1-k^2}}\right] + 1 - \sqrt{(1-\rho^2)(1-k^2)}\right\} - 2\nu p_o\sqrt{1-\rho^2} \end{array}\right.$$

Au centre , $\rho = 0$

$$(131)\quad \left|\begin{array}{ll} \sigma_z = -p_o & \\ \sigma_r = -p_o\dfrac{1+2\nu\ \sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} & \text{- cf.(127) en intervertissant } \sigma_r \text{ et } \sigma_\theta \\ \sigma_\theta = -p_o\dfrac{2\nu+\sqrt{1-k^2}}{1+\sqrt{1-k^2}} & \text{- cf. également (114)} \end{array}\right.$$

d) Valeurs extrêmales de l'excentricité $k = 0$ et $k = 1$

1) $k = 0$

C'est le problème du contact sphérique traité dans la 1ère partie.

Un développement limité des expressions précédentes lorsque $k \to 0$ donne pour partie principale les valeurs précédemment trouvées (expressions 26 et 27).

$\frac{b}{a} = k' = 0$ $\qquad\qquad$ $a \to \infty$

C'est le problème du cylindre indéfini, en contact selon une génératrice.

Les résultats connus de ce problème s'obtiennent également comme limite des expressions générales, soient :

- en dehors du contact : $\sigma_z = \sigma_r = \sigma_\theta = 0$

- sur la surface chargée

(132)
$$\left| \begin{array}{l} \sigma_z = -p = -p_o \sqrt{1-\rho^2} \\ \sigma_r = -\sigma_z \\ \sigma_\theta = -2\nu p = -2\nu p_o \sqrt{1-\rho^2} \end{array} \right.$$

σ_r étant dans le sens du petit axe $\rho = \frac{b}{b_o}$

Ce calcul donne aussi pour des valeurs très grandes mais finies de a, la distribution des contraintes le long du grand axe :

(133)
$$\left| \begin{array}{l} \sigma_z = -p_o \sqrt{1-\rho^2} \\ \sigma_r = -2\nu p_o \sqrt{1-\rho^2} \\ \sigma_\theta = \sigma_z \end{array} \right. \qquad \rho = \frac{a}{a_o}$$

Les expressions (133) deviennent évidemment constantes dans le cas du cylindre, avec $\rho \equiv 0$.

e) Remarques

1) Résultats antérieurs :

Les expressions des contraintes aux sommets des axes (123) et (129) ont été obtenues par BELAJEV (citées par TIMOSHENKO), avec une notation légèrement différente ($k = e$, $k' = \sqrt{1-k^2} = \beta$).

Les expressions des contraintes de surface données ci-dessus peuvent également être obtenues comme cas limite des expressions de BESSELING données à l'annexe n°4, en faisant tendre:

α vers 0 avec $\rho = \cos\beta$ pour $\rho \leqslant 1$

β vers 0 avec $\rho = \mathrm{ch}\alpha$ pour $\rho \geqslant 1$

La méthode directe employée ici présente les avantages suivants:

• obtenir directement une formulation relativement simple des contraintes en fonction de ρ et k

• s'appliquer à différents problèmes: charge de révolution quelconque, charge uniformément répartie sur une ellipse, charge à symétrie elliptique."

2) Contraintes au centre

Les contraintes au centre (127) ou (131), également obtenues par de nombreux auteurs, sont identiques à celles produites au centre d'une ellipse uniformément chargée selon la charge p_o (problème de WAY, formule 114)

Ce résultat s'obtient géométriquement en considérant une ellipse infiniment petite entourant le centre, semblable à l'ellipse de contact, dont la charge est, à la limite, une charge uniformément répartie p_o. L'effet de l'anneau elliptique periphérique étant nul, la propriété est établie (cf. ci-dessus 2^e partie I B 3° b).

3) Contraintes sur le grand axe pour $\rho \neq k$

On vérifie, lorsque $\rho \to k$ par valeurs supérieures ou inférieures que les formules (124) et (126) admettent pour limite les expressions (125). Lorsque ρ franchit la valeur k, les contraintes ne présentent donc pas de discontinuité malgré le changement des expressions analytiques.

Cette continuité est physiquement intuitive, mais s'établirait également à partir des expressions (117) comprenant des intégrales en r. Ces expressions ne contiennent que des fonctions en r continues et monotones sur l'intervalle (0 , a).

f) Calculs numériques

Ces calculs résultent directement des expressions (122) à (133). Le coefficient de POISSON ν est en général posé comme constante en mémoire. La valeur $\nu = 0{,}30$ adoptée ici pourrait ainsi être facilement modifiée.

Les fiches d'utilisation des principaux programmes et les tableaux numériques des résultats (pour $p_o = 1$) sont donnés aux pages suivantes.

Instructions de programme	
AV	c X
S	b ↕
e ↑	B X
S	c ↕
E ↑	C ↕
↓	c ↓
e ↕	C ↕
A X	c ↓
B ↕	A ↕
a ↑	/ V
d ↕	E ↕
↓	A X
↕	a ↑
÷	d ↓
C ↕	↕
b ↑	-
C ↓	A √
c ↕	e ↕
a V	↕
a ↑	D X
d ↑	C X
b ↓	A ◊
↓	V
b ↕	

Cte :
$1-2\nu$ en D

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface sur les axes de l'ellipse

1 - Point extérieur sur le grand axe $\rho > a$

OPERATIONS	SORTIE
Lecture carte	
Sélectionner V	
Composer $\frac{\rho}{k}$ $\Rightarrow$	σ_r

OBSERVATIONS

- $\sigma_z = -\sqrt{1-\rho^2}$
- pour $\frac{k}{\rho}$ voisin de 1, une variante de ce programme utilisant l'argument moitié donne une convergence plus rapide.

Instructions de programme	
1ère carte	2ème carte
A V d ↓ c ↓ S b − A ↕ e ↑ d ↕ / V S E ↓ C ↓ E ↑ e ÷ e X ↓ d X B ↑ X B ÷ E ÷ a ↑ A X d ✦ d ↓ C ↑ d ↕ b ↑ c ↑ E ↓ − B ↕ A X B ↕ a V a ↑ e ↓ a ↑ d ↓ A X d ↑ b ↑ b − b ↓ ↕ B ÷ ✦ − A √ b ↕ A √ d ↕ c X E ÷ E ↓ b ÷ ÷ e ÷ B X d X A X c ↕ D X d X C ↕ b − c ✦ B ↕ C ↕	A Y B X c ↕ c ✦ C ↑ A ◊ B ↓ c ↓ A X a ↑ A − d ↑ − ÷ b ✦ A ◊ A √ B ↕ c ↓ B − A ◊ C ↓ b − B X c − A ◊ C ↓ A − − a ↑ d ↑ ÷
Cte : 1 - 2ν en D	Cte :

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface sur les axes de l'ellipse

2 - Point intérieur situé sur le grand axe $k < \rho < 1$

OPERATIONS		SORTIE
Lecture 1ère carte		
Sélectionner V		
Composer ρ_k	⇒	Mémoire
Lecture 2ème carte		
Sélectionner Y	⇒	σ_r σ_θ $\tau'_{r\theta}$ τ'_{rz}

OBSERVATIONS

- $\sigma_z = -\sqrt{1-\rho^2}$
- $\tau'_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_\theta)$

$\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_z)$

Instructions de programme			
1ère carte			2ème carte
AV	a V	↕	cf p 89
S	a ↑	B ↑	
↓	d ↑	A ◆	
X	b ↓	C X	
e ↑	◆	D X	
E ↕	b ↑		
a ↑	c X		
d ↓	b ↕		
b ↑	B X		
b ↓	c ↕		
A ◆	C ↕		
E ↕	c ◆		
b –	C ↕		
A X	c ↓		
B ↑	A ↕		
b –	/ V		
A ↑	E ↓		
B –	a ↑		
A –	d ↓		
–	b ↑		
A X	↕		
B ↕	–		
C ↑	A ↑		
c ↑	e ↕		
C^{te} : 1 - 2ν en D			C^{te}

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface sur les axes de l'ellipse

3 - Point intérieur situé sur le grand axe $k = \rho$

OPERATIONS		SORTIE
Lecture 1ère carte		
Sélectionner V		
Composer $\rho = k$	⇒	Mémoire
Lecture 2ème carte		
Sélectionner Y	⇒	σ_r σ_θ τ'_{rz} $\tau'_{z\theta}$

OBSERVATIONS

- $\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$ $\qquad \tau'_{z\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$

Instructions de programme			
1ère carte			2ème carte
AV	d -	C ↓	
S	B ÷	e X	
e ↑	e X	B ↑	
S	E ÷	E ÷	
E ↑	A X	a ↑	
↓	C ↑	d ↓	
X	c ↑	b ↑	
a ↑	B ↕	-	
d ↓	a V	d ÷	
b ↑	a ↑	d ↕	cf p 89
-	d ↑	E ↓	
B ↕	b ↓	A X	
e ↓	÷	↕	
A X	b ↕	b ↓	
b -	c X	-	
B ÷	b ÷	A ∫	
A ∫	B X	E ÷	
d ↕	c ↕	÷	
e ↓	C ↕	d X	
E ÷	c ÷	D X	
A X	C ↕		
d -	c ↓		
B ↕	A ↕		
b ↓	/V		
C^{te} 1 -2ν en D			

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface sur les axes de l'ellipse

4 - Point intérieur situé sur le grand axe $\rho < k$

OPERATIONS — SORTIE

Lecture 1ère carte

Sélectionner V

Composer $\begin{vmatrix}\rho\\k\end{vmatrix}$ $\Rightarrow$ Mémoire

Lecture 2ème carte

Sélectionner Y $\Rightarrow$ $\begin{vmatrix}\sigma_r\\ \sigma_\theta\\ \tau'_{rz}\\ \tau'_{z\theta}\end{vmatrix}$

OBSERVATIONS

Instructions de programme		
A/	a V	d ↓
S	a ↑	b ↑
e ↑	d ↑	b ◆
S	b ↓	d ↕
c ↑	◆	E ↕
↓	b ↕	A X
A X	c X	↕
a ↑	b ÷	b ↓
d ↓	B X	-
b ↑	A -	A/
↕	-	E ÷
-	c ↕	÷
A/	C ↕	D X
E ÷	c ◆	d X
e X	C ↕	A ◊
A X	c ↓	/ ◊
d ↑	A ↕	/ ◊
b ◆	/V	V
A/	d ↓	
d -	A -	
A X	-	
↕	-	
C ↕	C X	
c ↑	a ↑	

Cte :

1 - 2ν en D

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface sur les axes de l'ellipse

5 - Point extérieur sur le petit axe

OPERATIONS	SORTIE
Lecture carte	
Sélectionner V	
Composer $\overset{\alpha}{k}$ $\Rightarrow$	σ_r

OBSERVATIONS

$$\sigma_\theta = -\sigma_r \qquad \sigma_z = 0$$

Instructions de programme	
1ère carte	2ème carte
AV C↑ b↓	AY E↕
S c X ✦	RS E↕
e↑ d✦ b↕	C↑ e−
↕ ↕ c X	E↕ A◊
↑ c↓ b÷	a↑ D↕
↓ d X B X	d↓ b−
X ↕− A−	b↑ e X
↕↑ B÷ −	c↓ E−
d↓ C X c↕	A X A◊
↕↑ ↕ C↕	↕ D↓
↕ b↓ c✦	b↓ A−
− ÷ C↓	− −
A∫ A X c↓	A∫ a↑
↕↕ B↑ A↕	e↕ d↑
e↓ b✦ /V	e↓ ÷
A X A∫ C−	d X e X
↕ ✦ −	A− E✦
b↓ A X e X	− A◊
− B↕ c↑	b✦ E↕
A∫ c↑ d X	E✦ a↑
c↓ C↑ E÷	d X d↑
L↓ aV RS	C÷ ÷
e÷ a↑	÷ A◊
A Y d↑	D X
Cte : 1 - 2ν en D	

Fiche d'utilisation de programme

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface sur les axes de l'ellipse

6 - Point intérieur sur le petit axe

OPERATIONS		SORTIE
Lecture 1ère carte		
Sélectionner V		
Composer ρ k	⇒	Mémoire
Lecture 2ème carte		σ_r
Sélectionner Y	⇒	σ_θ $\tau'_{r\theta}$ τ'_{rz}

OBSERVATIONS

$$\sigma_z = - \sqrt{1 - \rho^2}$$

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface selon les axes de l'ellipse en dehors de la surface de contact

Tableau de σ_r en fonction de $\frac{r}{a}$ ou $\frac{r}{b}$ et de $k = (1 - \frac{b^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}$

Grand axe

$\frac{r}{a}$ =	1,00	1,02	1,05	1,10	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
k = 0	0,1333	0,1282	0,1209	0,1102	0,0926	0,0680	0,0521	0,0411	0,0333
0,2	0,1339	0,1286	0,1210	0,1101	0,0923	0,0675	0,0515	0,0406	0,0329
0,4	0,1354	0,1296	0,1216	0,1098	0,0910	0,0656	0,0496	0,0389	0,0313
0,6	0,1379	0,1310	0,1216	0,1081	0,0876	0,0613	0,0455	0,0353	0,0281
0,8	0,1399	0,1301	0,1175	0,1008	0,0776	0,0513	0,0370	0,0281	0,0222
0,9	0,1368	0,1229	0,1068	0,0876	0,0640	0,0402	0,0283	0,0212	0,0166
0,95	0,1284	0,1095	0,0907	0,0711	0,0497	0,0301	0,0209	0,0155	0,0121
0,99	0,0957	0,0667	0,0500	0,0364	0,0241	0,0141	0,0096	0,0071	0,0056
0,999	0,0491	0,0236	0,0166	0,0119	0,0077	0,0041	0,0028	0,0020	0,0015
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Petit axe

$\frac{r}{b}$ =	1,00	1,02	1,05	1,10	1,20	1,40	1,60	1,80	2,00
k = 0	0,1333	0,1282	0,1209	0,1102	0,0926	0,0680	0,0521	0,0411	0,0333
0,2	0,1328	0,1277	0,1207	0,1102	0,0929	0,0686	0,0526	0,0417	0,0338
0,4	0,1308	0,1262	0,1198	0,1100	0,0937	0,0702	0,0544	0,0434	0,0354
0,6	0,1262	0,1244	0,1170	0,1087	0,0944	0,0728	0,0577	0,0467	0,0385
0,8	0,1142	0,1117	0,1081	0,1024	0,0922	0,0754	0,0624	0,0522	0,0442
0,9	0,0985	0,0970	0,0948	0,0913	0,0846	0,0730	0,0632	0,0550	0,0482
0,95	0,0814	0,0805	0,0792	0,0772	0,0732	0,0658	0,0593	0,0535	0,0484
0,99	0,0458	0,0456	0,0453	0,0448	0,0438	0,0418	0,0398	0,0381	0,0364
0,999	0,0167	0,0167	0,0166	0,0166	0,0165	0,0162	0,0160	0,0158	0,0155
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0

N.B. Les autres contraintes principales ont pour valeur:

$\sigma_z = 0$ $\qquad$ $\sigma_\theta = -\sigma_r$

avec $\tau_{max} = \tau'_{r\theta} = \sigma_\theta$ (cisaillement simple)

0 $\qquad$ 0

0

Contraintes de surface selon le Grand axe de l'ellipse (point intérieur) k = 0 , 0,2 ou 0,4

r/a	r	k = 0					k = 0,2					k = 0,4				
		$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$
0	1,0000	0,8000	0,8000	0,0000	0,1000	0,1000	0,7980	0,8020	0,0020	0,1010	0,0990	0,7913	0,8087	0,0087	0,1044	0,0956
0,1	0,9950	0,7955	0,7965	0,0005	0,0997	0,0992	0,7935	0,7985	0,0025	0,1007	0,0982	0,7868	0,8052	0,0092	0,1041	0,0949
0,2	0,9798	0,7818	0,7959	0,0020	0,0990	0,0969	0,7798	0,7879	0,0040	0,1000	0,0960	0,7733	0,7944	0,0106	0,1033	0,0927
0,3	0,9539	0,7585	0,7678	0,0046	0,0977	0,0930	0,7566	0,7697	0,0066	0,0987	0,0921	0,7502	0,7761	0,0129	0,1019	0,0889
0,4	0,9165	0,7247	0,7417	0,0085	0,0959	0,0874	0,7229	0,7435	0,0103	0,0968	0,0865	0,7168	0,7497	0,0164	0,0999	0,0834
0,5	0,8660	0,6791	0,7065	0,0137	0,0934	0,0797	0,6773	0,7083	0,0155	0,0943	0,0788	0,6716	0,7141	0,0212	0,0972	0,0760
0,6	0,8000	0,6193	0,6607	0,0212	0,0903	0,0696	0,6176	0,6624	0,0223	0,0912	0,0688	0,6123	0,6677	0,0277	0,0939	0,0661
0,7	0,7141	0,5411	0,6015	0,0302	0,0865	0,0563	0,5397	0,6030	0,0316	0,0872	0,0555	0,5349	0,6077	0,0364	0,0896	0,0532
0,8	0,6000	0,4367	0,5233	0,0433	0,0816	0,0383	0,4354	0,5246	0,0446	0,0823	0,0377	0,4314	0,5286	0,0486	0,0843	0,0357
0,9	0,4359	0,2849	0,4125	0,0638	0,0755	0,0117	0,2840	0,4135	0,0648	0,0760	0,0112	0,2808	0,4166	0,0679	0,0775	0,0096
0,95	0,3122	0,1690	0,3306	0,0808	0,0716	-0,0092	0,1682	0,3314	0,0816	0,0720	-0,0096	0,1657	0,3339	0,0841	0,0732	-0,0108
0,99	0,1411	0,0054	0,2203	0,1128	0,0678	-0,0396	0,0048	0,2209	0,1080	0,0681	-0,0399	0,0030	0,2227	0,1099	0,0690	-0,0409
0,999	0,0447	-0,0889	0,1604	0,1246	0,0668	-0,0578	-0,0894	0,1609	0,1252	0,0670	-0,0581	-0,0910	0,1626	0,1268	0,0679	-0,0589
1	0	-0,1333	0,1333	0,1333	0,0667	-0,0667	-0,1339	0,1339	0,1339	0,0669	-0,0669	-0,1354	0,1354	0,1354	0,0677	-0,0677

$\tau'_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ $\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$ $\tau'_{z\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$

Contraintes de surface selon le Grand axe de l'ellipse (point intérieur) k = 0,6 0,8 ou 0,9

		k = 0,6					k = 0,8					k = 0,9				
r/a	$-\sigma_z$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$
0	1,0000	0,7778	0,8222	0,0222	0,1111	0,0889	0,7500	0,8500	0,0500	0,1250	0,0750	0,7214	0,8786	0,0786	0,1393	0,0607
0,1	0,9950	0,7734	0,8186	0,0226	0,1108	0,0882	0,7458	0,8462	0,0502	0,1246	0,0744	0,7174	0,8746	0,0786	0,1388	0,0752
0,2	0,9798	0,7601	0,8076	0,0238	0,1099	0,0861	0,7329	0,8347	0,0509	0,1234	0,0725	0,7051	0,8625	0,0787	0,1373	0,0586
0,3	0,9539	0,7374	0,7890	0,0258	0,1083	0,0824	0,7111	0,8151	0,0521	0,1214	0,0693	0,6843	0,8420	0,0789	0,1348	0,0559
0,4	0,9165	0,7045	0,7620	0,0287	0,1060	0,0772	0,6794	0,7870	0,0538	0,1185	0,0647	0,6540	0,8124	0,0792	0,1313	0,0520
0,5	0,8660	0,6600	0,7257	0,0328	0,1030	0,0702	0,6366	0,7491	0,0562	0,1147	0,0585	0,6131	0,7726	0,0798	0,1265	0,0467
0,6	0,8000	0,6017	0,6783	0,0383	0,0992	0,0608	0,5804	0,6996	0,0596	0,1098	0,0515	0,5593	0,7207	0,0807	0,1203	0,0396
0,7	0,7141	0,5254	0,6172	0,0459	0,0943	0,0484	0,5069	0,6357	0,0644	0,1036	0,0392	0,4891	0,6535	0,0822	0,1125	0,0303
0,8	0,6000	0,4234	0,5366	0,0566	0,0883	0,0317	0,4084	0,5516	0,0716	0,0958	0,0242	0,3949	0,5651	0,0851	0,1026	0,0174
0,9	0,4359	0,2750	0,4224	0,0737	0,0805	0,0067	0,2648	0,4326	0,0839	0,0855	0,0016	0,2572	0,4403	0,0916	0,0894	-0,0022
0,95	0,3122	0,1613	0,3383	0,0885	0,0755	-0,0130	0,1544	0,3452	0,0953	0,0789	-0,0165	0,1509	0,3487	0,0989	0,0807	-0,0182
0,99	0,1411	-0,0000	0,2257	0,1129	0,0705	-0,0423	-0,0033	0,2290	0,1161	0,0722	-0,0439	-0,0020	0,2277	0,1148	0,0715	-0,0433
0,999	0,0447	-0,0936	0,1651	0,1294	0,0692	-0,0602	-0,0957	0,1673	0,1315	0,0702	-0,0613	-0,0928	0,1644	0,1286	0,0688	-0,0598
1	0	-0,1379	0,1379	0,1379	0,0689	-0,0689	-0,1399	0,1399	0,1399	0,0699	-0,0699	-0,1368	0,1368	0,1368	0,0684	-0,0684

$\tau'_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ $\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$ $\tau'_{z\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$

Contraintes de surface selon le Grand axe de l'ellipse (point intérieur) k = 0,95 0,99 ou 1

$\frac{r}{a}$	$\frac{z}{a}$	k = 0,95					k = 0,99					k = 1				
		$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$
0	1,0000	0,6952	0,9048	0,1048	0,1524	0,0476	0,6495	0,9505	0,1506	0,1753	-0,0247	0,6000	1,0000	0,2000	0,2000	-0
0,1	0,9950	0,6913	0,9006	0,1046	0,1518	0,0471	0,6460	0,9460	0,1500	0,1745	0,0245	0,5970	0,9950	0,1990	0,1990	-0
0,2	0,9798	0,6797	0,8880	0,1042	0,1500	0,0459	0,6354	0,9322	0,1484	0,1722	0,0238	0,5879	0,9798	0,1960	0,1960	-0
0,3	0,9539	0,6598	0,8665	0,1034	0,1471	0,0437	0,6175	0,9088	0,1456	0,1682	0,0225	0,5724	0,9539	0,1908	0,1908	-0
0,4	0,9165	0,6310	0,8355	0,1023	0,1428	0,0405	0,5915	0,8749	0,1417	0,1625	0,0208	0,5499	0,9165	0,1833	0,1833	-0
0,5	0,8660	0,5920	0,7937	0,1009	0,1370	0,0362	0,5564	0,8293	0,1364	0,1548	0,0184	0,5196	0,8660	0,1732	0,1732	-0
0,6	0,8000	0,5408	0,7392	0,0992	0,1296	0,0304	0,5103	0,7697	0,1297	0,1448	0,0151	0,4800	0,8000	0,1600	0,1600	-0
0,7	0,7141	0,4739	0,6688	0,0974	0,1201	0,0227	0,4501	0,6925	0,1212	0,1320	0,0108	0,4285	0,7141	0,1428	0,1428	-0
0,8	0,6000	0,3841	0,5759	0,0959	0,1080	0,0120	0,3695	0,5905	0,1105	0,1152	0,0047	0,3600	0,6000	0,1200	0,1200	-0
0,9	0,4359	0,2528	0,4447	0,0960	0,0916	-0,0044	0,2518	0,4457	0,0970	0,0921	-0,0049	0,2615	0,4359	0,0872	0,0872	-0
0,95	0,3122	0,1512	0,3484	0,0986	0,0805	-0,0181	0,1608	0,3388	0,0890	0,0757	-0,0133	0,1873	0,3122	0,0624	0,0624	-0
0,99	0,1411	0,0040	0,2217	0,1089	0,0685	-0,0403	0,0283	0,1974	0,0845	0,0564	-0,0282	0,0846	0,1411	0,0282	0,0282	-0
0,999	0,0447	-0,0847	0,1563	0,1205	0,0647	-0,0558	-0,0591	0,1304	0,0947	0,0519	-0,0428	0,0268	0,0447	0,0089	0,0089	-0
1	0	-0,1284	0,1284	0,1284	0,0642	-0,0642	-0,0957	0,0957	0,0957	0,0478	-0,0478	-0	-0	0	0	-0

$\tau'_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ $\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$ $r'_{z\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$

Contraintes de surface selon le Petit axe de l'ellipse (point intérieur) k = 0 0,2 ou 0,4

		k = 0					k = 0,2					k = 0,4				
r/b	z/b	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$
0	1,0000	0,8000	0,8000	0	0,1000	0,1000	0,8020	0,7980	-0,0020	0,0990	0,1010	0,8087	0,7913	-0,0087	0,0956	0,1044
0,1	0,9950	0,7955	0,7965	0,0005	0,0997	0,0992	0,7975	0,7945	-0,0015	0,0987	0,1002	0,8042	0,7878	-0,0082	0,0954	0,1036
0,2	0,9798	0,7818	0,7859	0,0020	0,0990	0,0969	0,7838	0,7839	0,0000	0,0980	0,0979	0,7903	0,7773	-0,0065	0,0947	0,1012
0,3	0,9539	0,7585	0,7678	0,0046	0,0977	0,0930	0,7605	0,7659	0,0027	0,0967	0,0940	0,7668	0,7595	-0,0037	0,0936	0,0972
0,4	0,9165	0,7247	0,7417	0,0085	0,0959	0,0874	0,7266	0,7398	0,0066	0,0950	0,0883	0,7327	0,7337	0,0005	0,0919	0,0914
0,5	0,8660	0,6791	0,7065	0,0137	0,0934	0,0797	0,6809	0,7048	0,0120	0,0926	0,0806	0,6867	0,6990	0,0061	0,0897	0,0833
0,6	0,8000	0,6193	0,6607	0,0212	0,0903	0,0696	0,6209	0,6591	0,0191	0,0896	0,0704	0,6263	0,6537	0,0137	0,0868	0,0731
0,7	0,7141	0,5411	0,6015	0,0802	0,0865	0,0563	0,5426	0,6000	0,0287	0,0858	0,0570	0,5475	0,5951	0,0238	0,0833	0,0595
0,8	0,6000	0,4367	0,5233	0,0433	0,0816	0,0383	0,4379	0,5221	0,0421	0,0810	0,0389	0,4421	0,5179	0,0379	0,0789	0,0410
0,9	0,4359	0,2849	0,4125	0,0632	0,0755	0,0117	0,2859	0,4115	0,0628	0,0750	0,0122	0,2892	0,4082	0,0595	0,0733	0,0139
0,95	0,3122	0,1690	0,3306	0,0808	0,716	-0,0092	0,1698	0,3298	0,0800	0,0712	-0,0088	0,1726	0,3270	0,0772	0,0698	-0,0074
0,99	0,1411	0,0054	0,2203	0,1128	0,0678	-0,0396	0,0060	0,2197	0,1068	0,0675	-0,0393	0,0082	0,2175	0,1047	0,0664	-0,0389
0,999	0,0447	-0,0889	0,1604	0,1246	0,0668	-0,0578	0,0884	0,1600	0,1242	0,0666	-0,0576	-0,0863	0,1578	0,1221	0,0655	-0,0567
1	0	-0,1333	0,1333	0,1333	0,0667	-0,0667	-0,1328	0,1328	0,1328	0,0664	-0,0664	-0,1308	0,1308	0,1308	0,0654	-0,0654

$\tau'_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ $\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$ $\tau'_{z\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$

Contraintes de surface selon le Petit axe de l'ellipse (point intérieur) k = 0,6 0,8 ou 0,9

$\frac{r}{b}$	$-\sigma_z$	k = 0,6					k = 0,8					k = 0,9				
		$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$
0	1,0000	0,8222	0,7778	-0,0222	0,0889	0,1111	0,8500	0,7500	-0,0500	0,0750	0,1250	0,8786	0,7214	-0,0786	0,0607	0,1393
0,1	0,9950	0,8176	0,7774	-0,0216	0,0887	0,1103	0,8453	0,7467	-0,0493	0,0749	0,1241	0,8737	0,7182	-0,0777	0,0606	0,1384
0,2	0,9798	0,8036	0,7641	-0,0198	0,0881	0,1078	0,8309	0,7367	-0,0471	0,0744	0,1215	0,8591	0,7086	-0,0753	0,0603	0,1356
0,3	0,9539	0,7798	0,7465	-0,0166	0,0871	0,1037	0,8065	0,7198	-0,0434	0,0737	-0,1170	0,8342	0,6921	-0,0710	0,0599	0,1309
0,4	0,9165	0,7452	0,7212	-0,0120	0,0856	0,0976	0,7711	0,6953	-0,0379	0,0726	0,1106	0,7981	0,6683	-0,0649	0,0592	0,1241
0,5	0,8660	0,7986	0,6871	-0,0057	0,0837	0,0894	0,7233	0,6623	-0,0305	0,0713	0,1018	0,7494	0,6363	-0,0566	0,0583	0,1143
0,6	0,8000	0,6374	0,6426	0,0026	0,0813	0,0787	0,6607	0,6193	-0,0207	0,0696	0,0903	0,6856	0,5944	-0,0456	0,0572	0,1028
0,7	0,7141	0,5576	0,5851	0,0137	0,0783	0,0645	0,5791	0,5635	-0,0078	0,0675	0,0753	0,6025	0,5402	-0,0312	0,0558	0,0869
0,8	0,6000	0,4509	0,5091	0,0291	0,0745	0,0454	0,4702	0,4898	0,0098	0,0649	0,0551	0,4917	0,4683	-0,0117	0,0541	0,0658
0,9	0,4359	0,2964	0,4011	0,0524	0,0698	0,0174	0,3127	0,3847	0,0360	0,0616	0,0256	0,3318	0,3656	0,0169	0,0521	0,0351
0,95	0,3122	0,1786	0,3210	0,0712	0,0668	-0,0044	0,1931	0,3065	0,0567	0,0596	0,0028	0,2107	0,2889	0,0391	0,0508	0,1116
0,99	0,1411	0,0131	0,2126	0,0997	0,0640	-0,0357	0,0257	0,2000	0,0871	0,0577	-0,0294	0,0419	0,1838	0,0710	0,0496	-0,0213
0,999	0,0447	-0,0817	0,1532	0,1175	0,0632	-0,0542	-0,0696	0,1411	0,1054	0,0572	-0,0482	-0,0539	0,1254	0,0896	0,0493	-0,0403
1	0	-0,1262	0,1262	0,1262	0,0631	-0,0631	-0,1142	0,1142	0,1142	0,0571	-0,0571	-0,0985	0,0985	0,0985	0,0492	-0,0492

$\tau'_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ $\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$ $\tau'_{z\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$

Contraintes de surface selon le Petit axe de l'ellipse (point intérieur) k = 0,95 0,99 ou 1

		k = 0,95					k = 0,99					k = 1				
$\frac{r}{b}$	$\frac{z}{b}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$	$-\sigma_r$	$-\sigma_\theta$	$\tau'_{r\theta}$	τ'_{rz}	$-\tau'_{z\theta}$
0	1,0000	0,9048	0,6952	-0,1048	0,0476	0,1524	0,9505	0,6495	-0,1506	0,0247	0,1753	1,0000	0,6000	0,2000	0	0,2000
0,1	0,9950	0,9000	0,6921	-0,1039	0,0475	0,1514	0,9456	0,6464	-0,1496	0,0247	0,1743	0,9950	0,5970	0,1990	0	0,1990
0,2	0,9798	0,8851	0,6826	-0,1012	0,0474	0,1486	0,9305	0,6372	-0,1466	0,0247	0,1713	0,9798	0,5879	0,1960	0	0,1960
0,3	0,9539	0,8598	0,6665	-0,0966	0,0471	0,1437	0,9048	0,6215	-0,1416	0,0246	0,1662	0,9539	0,5724	0,1908	0	0,1908
0,4	0,9165	0,8232	0,6432	-0,0900	0,0467	0,1366	0,8676	0,5989	-0,1343	0,0245	0,1588	0,9165	0,5499	0,1833	0	0,1833
0,5	0,8660	0,7738	0,6119	-0,0810	0,0461	0,1270	0,8174	0,5683	-0,1245	0,0243	0,1488	0,8660	0,5196	0,1732	0	0,1732
0,6	0,8000	0,7091	0,5709	-0,0691	0,0454	0,1145	0,7517	0,5283	-0,1117	0,0242	0,1358	0,8000	0,4800	0,1600	0	0,1600
0,7	0,7141	0,6249	0,5177	-0,0536	0,0446	0,0982	0,6663	0,4763	-0,0950	0,0239	0,1189	0,7141	0,4285	0,1428	0	0,1428
0,8	0,6000	0,5128	0,4472	-0,0328	0,0436	0,0764	0,5527	0,4073	-0,0727	0,0237	0,0963	0,6000	0,3600	0,1200	0	0,1200
0,9	0,4359	0,3515	0,3459	-0,0028	0,0422	0,0450	0,3892	0,3082	-0,0405	0,0233	0,0638	0,4359	0,2615	0,0872	0	0,0872
0,95	0,3122	0,2291	0,2705	0,0207	0,0416	0,0208	0,2660	0,2336	-0,0162	0,0231	0,0393	0,3122	0,1873	0,0624	0	0,0624
0,99	0,1411	0,0593	0,1664	0,0536	0,0409	-0,0216	0,0951	0,1306	0,0177	0,0230	0,0052	0,1411	0,0846	0,0282	0	0,0282
0,999	0,0447	-0,0367	0,1082	0,0725	0,0407	-0,0318	-0,0011	0,0727	0,0369	0,0229	-0,0140	0,0447	0,0268	0,0089	0	0,0089
1	0	-0,0814	0,0814	0,0814	0,0407	-0,0407	-0,0458	0,0458	0,0458	0,0229	-0,0229	- 0	- 0	0	0	- 0

$\tau'_{r\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)$ $\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$ $\tau'_{z\theta} = \frac{1}{2}(\sigma_z - \sigma_\theta)$

CHAPITRE II

CALCUL DES TENSIONS SELON L'AXE NORMAL

A - Principe et base des calculs

1°) Expression des tensions

L'expression des tensions principales sur l'axe normal a été obtenue par différents auteurs, soit, en prenant pour plan de figure le plan normal passant par le petit axe,

avec $\rho = \frac{r}{b}$ $\zeta = \frac{z}{b}$ $k' = \frac{b}{a} < 1$ $k = \sqrt{1-k'^2}$ $p_o = 1$

$$\left|\begin{array}{l} \sigma_z = -\dfrac{1}{\sqrt{(1+\zeta^2)(1+k'^2\zeta^2)}} \\ \sigma_r = \zeta\left[2(1-\nu)B(k,\varphi)+2\nu E(k,\varphi)+\dfrac{k'}{k^2}(2\nu+1-k'\sqrt{\dfrac{1+\zeta^2}{1+k'^2\zeta^2}} - \dfrac{1}{k'}\sqrt{\dfrac{1+k'^2\zeta^2}{1+\zeta^2}})\right] - \dfrac{2\zeta^2}{\sqrt{(1+\zeta^2)(1+k'^2\zeta^2)}} \\ \sigma_\theta = \zeta\left[2k'^2(1-\nu)D(k,\varphi)+2\nu E(k,\varphi)\right] - \dfrac{k'}{k^2}\left[1-2\nu-(k'+\dfrac{1}{k'})\sqrt{\dfrac{1+\zeta^2}{1+k'^2\zeta^2}}\right] \end{array}\right.$$

E, B et D fonctions elliptiques:

$$E = \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\, d\theta \quad , \quad B = \int_0^\varphi \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \qquad D = \int_0^\varphi \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}$$

σ_z sera calculée directement par l'expression simple ci-dessus, les deux autres composantes seront obtenues par une autre méthode utilisant des résultats numériques antérieurs.

2°) Principe du calcul de σ_r et σ_θ -

a) Méthode

Nous utiliserons la solution explicite donnée par DERESIEWICZ pour le cas d'une charge uniformément répartie sur une ellipse.

La méthode s'applique à une charge à symétrie elliptique, définie selon chacun des axes de l'ellipse par une fonction décroissante $p(\rho)$, que l'on considère comme une superposition de charges élémentaires, uniformément réparties sur des ellipses concentriques semblables.(fig. p. suivante)

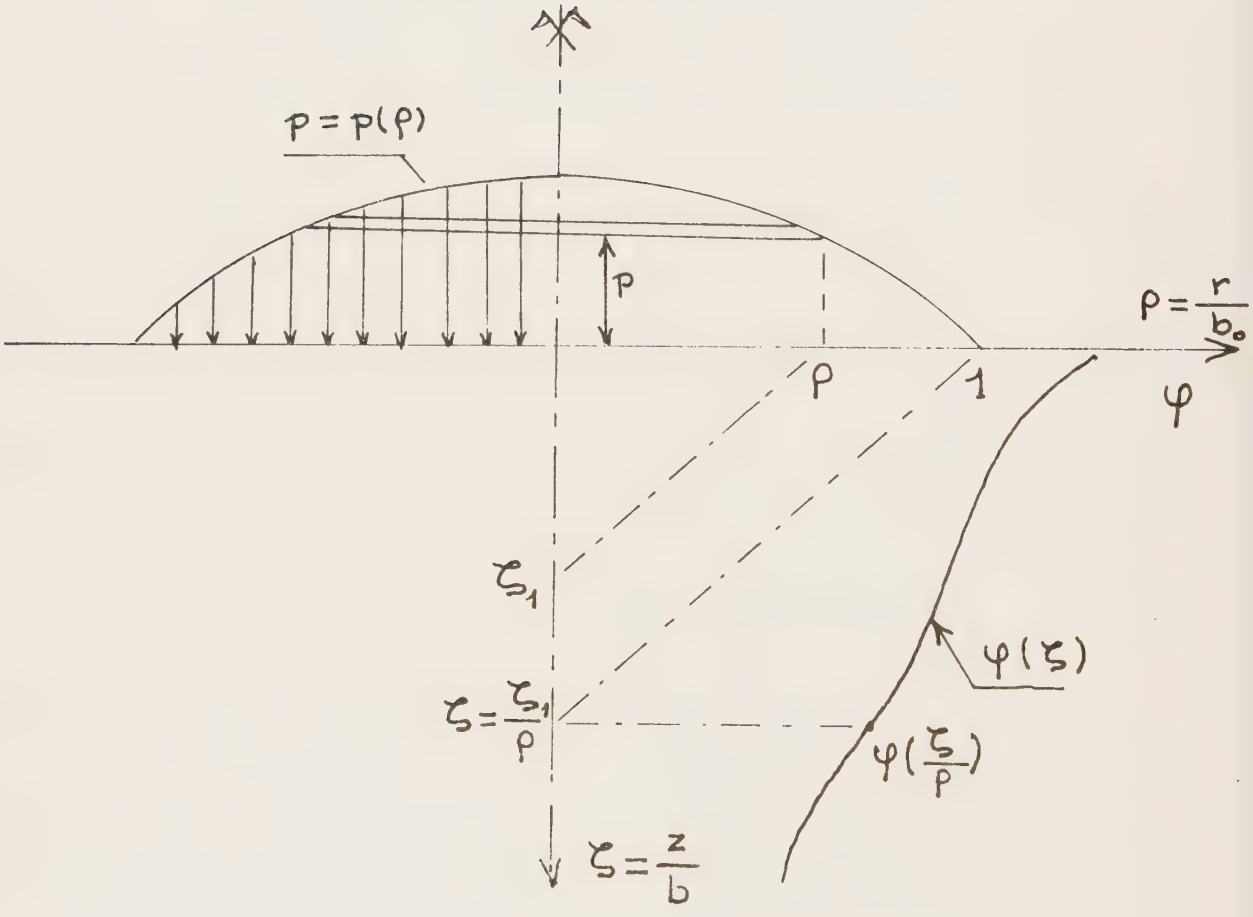
b) Formule de transformation:

Considérons le cas d'une charge unitaire uniformément répartie sur une ellipse de demi-axes a_o, b_o, l'un des demi-axes (par exemple b_o) étant pris pour unité.

Cette charge engendre sur l'axe normal à la cote $\zeta = \frac{z}{b}$ un phénomène élastique $y = \varphi(\zeta)$ défini par la solution de DERESIEWICZ.

Une charge élémentaire $|dp|$ uniformément répartie sur une ellipse concentrique semblable (de demi petit axe b, défini par le rapport $\rho = \frac{b}{b_o}$) engendre par similitude, à la cote ζ_1, le phénomèn

$$dY = d\,\emptyset\,(\zeta_1) = \varphi\,(\frac{\zeta_1}{\rho}) \cdot |dp| = -\,\varphi\,(\frac{\zeta_1}{\rho})\,dp$$



L'ordonnée de la courbe transformée $\emptyset\,(\zeta_1)$ au point ζ_1 s'obtient en intégrant la charge élémentaire de $\rho = 0$ à $\rho = 1$, avec $p = p_o \sqrt{1 - \rho^2}$ dans le cas du contact elliptique :

$$Y_1 = \emptyset\,(\zeta_1) = -\int_{\rho=0}^{\rho=1} \varphi\,(\frac{\zeta_1}{\zeta})\,dp$$

ou en posant $\frac{\zeta_1}{\rho} = \zeta$

$$(134) \qquad Y_1 = \phi(\zeta_1) = p_o \; \zeta_1^2 \int_{\zeta_1}^{\infty} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \zeta_1^2}} \, d\zeta$$

B - Intégration numérique des expressions de DERESIEWICZ.

1°) Principe

Le calcul utilise pour l'application de la transformation (132) les points précédemment calculés par DERESIEWICZ (cf. tableaux à l'annexe n° 3).

Ces point correspondent aux valeurs de ζ :

0 0,1 0,2 0,4 0,7 1 1,5 2 3

pour un coefficient de POISSON $\nu = 0,30$

et une excentricité k= 0 0,3 0,6 0,9 ou 0,99

2°) Méthode

Les points des courbes initiales étant relativement espacés, une interpolation linéaire ou parabolique donnait une précision insuffisante à la courbe transformée.

Pour obtenir une précision voisine de 1/1000, nous avons remplacé la courbe initiale :

- par une courbe du troisième degré passant par les 4 premiers points sur les 3 premiers intervalles d'intégration.
- par une courbe d'équation $Y = A\,(\zeta - B)^{-3,2}$, passant par les points extrêmes de chacun des autres intervalles, très proche des courbes réelles (l'influence de ces intervalles est d'ailleurs faible sur l'intégration).

3°) Formules utilisées (cas général)

a) Pour les 3 premiers intervalles

La variable utilisée pour le calcul du point (ζ_1 , Y_1) étant $\frac{\zeta}{\zeta_1} = u$, la formule de LAGRANGE donne l'équation de la courbe passant par les 4 premiers points :

$$y = (Au^3 + Bu^2 + Cu + D) \qquad (\text{avec } p_o = 1)$$

En appliquant à cette expression la transformation (132), on obtient :

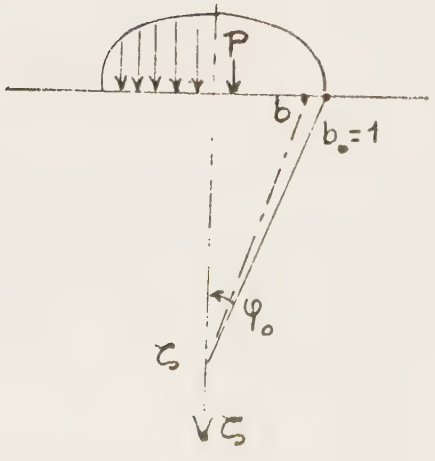
$$(136) \quad \int_1^{\frac{\zeta_4}{\zeta_1} = u_4} \frac{y}{u^2\sqrt{u^2-1}}\, du = \left[\frac{Au+D}{u}\sqrt{u^2-1} + B\ \text{Argth}\sqrt{1-\frac{1}{u^2}} + C\ \text{Arctg}\sqrt{u^2-1}\right]_0^{u_4}$$

b) Pour les autres intervalles , on obtient aisément, en intégrant par rapport à ζ la courbe approchée définie ci-dessus :

$$(137) \quad \int_{\zeta_n}^{\zeta_{n+1}} \frac{\zeta_1^2\, y\, d\zeta}{\zeta^2\sqrt{\zeta^2-\zeta_1^2}} = \frac{y_n\zeta_n - y_{n+1}\zeta_{n+1}}{2,2} + \frac{\zeta_n - R\,\zeta_{n+2}}{1-R}(y_{n+1} - y_n)$$

$$\text{avec} \quad R = \left[\frac{y_{n+1}}{y_n}\right]^{\frac{1}{3,2}}$$

4°) Cas limite $k = 1$



Dans ce cas limite du problème à deux dimensions, les contraintes sur l'axe s'obtiennent de façon analogue à partir du problème de la charge uniformément répartie sur une bande indéfinie de largeur 2 b :

. Pour la charge uniformément répartie, les contraintes principales ont pour expression, en fonction de $\varphi = \text{Arctg } \frac{b}{\zeta}$:

$$(138)\quad \left|\begin{array}{l} \sigma_z = -\frac{p}{\pi}(2\varphi + \sin 2\varphi) \\ \sigma_r = -\frac{p}{\pi}(2\varphi - \sin 2\varphi) \qquad \text{(sens de l'axe b)} \\ \sigma_\theta = -\frac{2\nu p}{\pi}\varphi \end{array}\right.$$

. Pour la charge $p = p_o\sqrt{1-\rho^2} = p_o\sqrt{1-\frac{tg^2\varphi}{tg^2\varphi_o}}$ les contraintes deviennent :

$$\bar{\sigma}_i = \int_0^{\varphi_o} \sigma_i \, dp \text{ , soient, tous calculs faits :}$$

$$(139)\quad \left|\begin{array}{l} \bar{\sigma}_z = -p_o \sin\varphi_o \\ \bar{\sigma}_r = p_o(\sin\varphi_o - 2\,tg\frac{\varphi_o}{2}) \\ \bar{\sigma}_\theta = -2\nu p_o\, tg\frac{\varphi_o}{2} \end{array}\right.$$

ou, en fonction de ζ :

$$(140)\quad \left|\begin{array}{l} \bar{\sigma}_z = -\frac{p_o}{\sqrt{1+\zeta^2}} \\ \bar{\sigma}_r = p_o\left[\frac{1}{\sqrt{1+\zeta^2}} + 2\zeta - 2\sqrt{1+\zeta^2}\right] \\ \bar{\sigma}_\theta = -2\nu p_o(\sqrt{1+\zeta^2} - \zeta) \end{array}\right.$$

5°) Calcul numérique

Le calcul numérique de chaque point transformé de cote ζ, s'obtient :

- par l'application de la formule de Lagrange aux 3 premiers intervalles à partir de la cote ζ sur la courbe initiale, donnant les coefficients A, B, C, D.

- par l'utilisation des formules (134) et (137) sur tous les intervalles de la courbe initiale à partir de ζ.

Les résultats numériques sont donnés aux tableaux des pages suivantes.

REMARQUE :

Le calcul des contraintes pour k = 0 (cf. 1ère partie) et k = 1 a été fait directement par les expressions données pour ces cas particuliers. On l'obtient également en appliquant la transformation définie par l'expression (132), aux valeurs correspondantes du problème de la charge uniformément répartie, dont la solution explicite est connue et simple. Ce calcul, fait pour plusieurs points par la seconde méthode a permis de vérifier que la précision désirée de 1/1000 p[illegible] était bien obtenue sur les points transformés.

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes à l'intérieur du milieu élastique selon l'axe de la charge

	k = 0			k = 0,3			k = 0,6		
ζ	σ_z	σ_r	σ_θ	σ_z	σ_r	σ_θ	σ_z	σ_r	σ_θ
0	-1,000	-0,800	-0,800	-1,000	-0,796	-0,804	-1,000	-0,778	-0,822
0,1	-0,990	-0,614	-0,614	-0,991	-0,616	-0,619	-0,992	-0,622	-0,638
0,2	-0,962	-0,462	-0,462	-0,963	-0,466	-0,467	-0,968	-0,491	-0,486
0,4	-0,862	-0,250	-0,250	-0,867	-0,261	-0,255	-0,884	-0,298	-0,272
0,7	-0,671	-0,091	-0,091	-0,681	-0,099	-0,094	-0,715	-0,134	-0,104
1	-0,500	-0,029	-0,029	-0,512	-0,035	-0,032	-0,552	-0,055	-0,036
1,5	-0,308	0,000	0,000	-0,318	-0,001	0,000	-0,355	-0,009	0,000
2	-0,200	0,005	0,005	-0,208	0,005	0,005	-0,237	0,002	0,006
3	-0,100	0,005	0,005	-0,104	0,006	0,004	-0,122	0,005	0,006

	k = 0,9			k = 0,99			k = 1		
ζ	σ_z	σ_r	σ_θ	σ_z	σ_r	σ_θ	σ_z	σ_r	σ_θ
0	-1,000	-0,7214	-0,879	-1,000	-0,650	-0,950	-1,000	-0,600	-1,000
0,1	-0,994	-0,621	-0,696	-0,995	-0,584	-0,766	-0,995	-0,543	-0,815
0,2	-0,977	-0,531	-0,543	-0,980	-0,526	-0,611	-0,981	-0,492	-0,659
0,4	-0,915	-0,385	-0,324	-0,927	-0,427	-0,380	-0,928	-0,406	-0,426
0,7	-0,784	-0,234	-0,133	-0,815	-0,317	-0,181	-0,819	-0,312	-0,222
1	-0,648	-0,141	-0,050	-0,700	-0,241	-0,086	-0,707	-0,248	-0,121
1,5	-0,464	-0,060	-0,002	-0,543	-0,161	-0,021	-0,555	-0,182	-0,051
2	-0,337	-0,025	0,008	-0,430	-0,111	0,000	-0,447	-0,142	-0,025
3	-0,192	-0,003	0,009	-0,291	-0,057	0,010	-0,316	-0,097	-0,008

N.B. σ_r est dirigée selon le grand axe. $\quad k = (1 - \frac{b^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}$

$\nu = 0,3$

CONTACT ELLIPTIQUE

Cisaillement maximum selon l'axe vertical de la charge

$\tau'_{rz} = \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_z)$

$\tau'_{\theta z} = \frac{1}{2}(\sigma_\theta - \sigma_z)$

$\nu = 0,3$

	k = 0		k = 0,3		k = 0,6		k = 0,9		k = 0,99		k = 1	
ζ	τ'_{rz}	$\tau'_{\theta z}$	τ'_{rz}	$\tau'_{\theta z}$	τ'_{rz}	$\tau'_{\theta z}$	τ'_{rz}	$\tau'_{\theta z}$	τ'_{rz}	$\tau'_{\theta z}$	τ'_{rz}	$\tau'_{\theta z}$
0	0,100	0,100	0,102	0,098	0,111	0,089	0,139	0,060	0,175	0,025	0,200	0,000
0,1	0,188	0,188	0,187	0,136	0,185	0,177	0,186	0,149	0,205	0,114	0,226	0,090
0,2	0,250	0,250	0,248	0,248	0,238	0,241	0,222	0,216	0,227	0,184	0,244	0,161
0,4	0,306	0,306	0,303	0,306	0,293	0,306	0,264	0,295	0,250	0,273	0,261	0,251
0,7	0,290	0,290	0,290	0,293	0,290	0,305	0,274	0,325	0,249	0,317	0,253	0,298
1	0,235	0,235	0,238	0,239	0,248	0,257	0,253	0,298	0,229	0,307	0,229	0,293
1,5	0,154	0,154	0,158	0,159	0,173	0,177	0,201	0,230	0,191	0,261	0,186	0,252
2	0,102	0,102	0,106	0,106	0,120	0,122	0,156	0,172	0,159	0,215	0,152	0,211
3	0,052	0,052	0,055	0,055	0,064	0,065	0,095	0,101	0,117	0,150	0,109	0,154
Max ζ =	0,490		0,50		0,53		0,65		0,75		0,786	
τ =	0,3099		0,311		0,316		0,325		0,318		0,3003	

Maximum maximorum pour: k = 0,91 ζ = 0,66 τ = 0,327

CHAPITRE III

DIAGRAMMES DE CONTRAINTES, INFLUENCE DE L'EXCENTRICITE, COMPARAISON AU CAS DU POINCON SPHERIQUE

A CONTRAINTES DE SURFACE

Les planches XVIII à XXIII montrent l'influence de l'excentricité sur la distribution des contraintes de surface, du problème de révolution $k = 0$, $\frac{b}{a} = 1$ au problème bidimensionnel du cylindre appuyé selon une génératrice.

On remarque la diminution progressive de l'effet marginal, pour des valeurs élevées de l'excentricité. A la limite (Planche XXIII) les contraintes marginales tendent vers 0 avec $\frac{b}{a}$, non seulement vers l'extrémité du petit axe ce qui correspond au problème du cylindre, mais également vers celle du grand axe : la distribution des contraintes présente alors une pseusdo symétrie selon les deux demi-axes a et b (distributions identiques en fonction de $\frac{r}{a}$ et $\frac{r}{b}$ respectivement).

B CONTRAINTES SUR L'AXE

Le diagramme des contraintes sur l'axe σ_z σ_r σ_θ selon les valeurs données au tableau de la page 108 ne diffère pas dans sa forme générale du diagramme de σ_z et σ_θ pour le poinçon sphérique (page 32), en dehors de l'écart relatif des courbes σ_r et σ_θ qui augmente avec k.

La planche XXIV figure le cisaillement maximal sur l'axe en fonction de $\frac{z}{b}$; pour différentes valeurs de l'excentricité k. chaque courbe présente un maximum dont la cote croît de 0,481 b à 0,747 b lorsque k varie de 0 à 1.

L'ordonnée de ce maximum varie, dans le même intervalle de 0,3003 p_o à 0,3100 p_o, en passant par un maximum absolu correspondant à

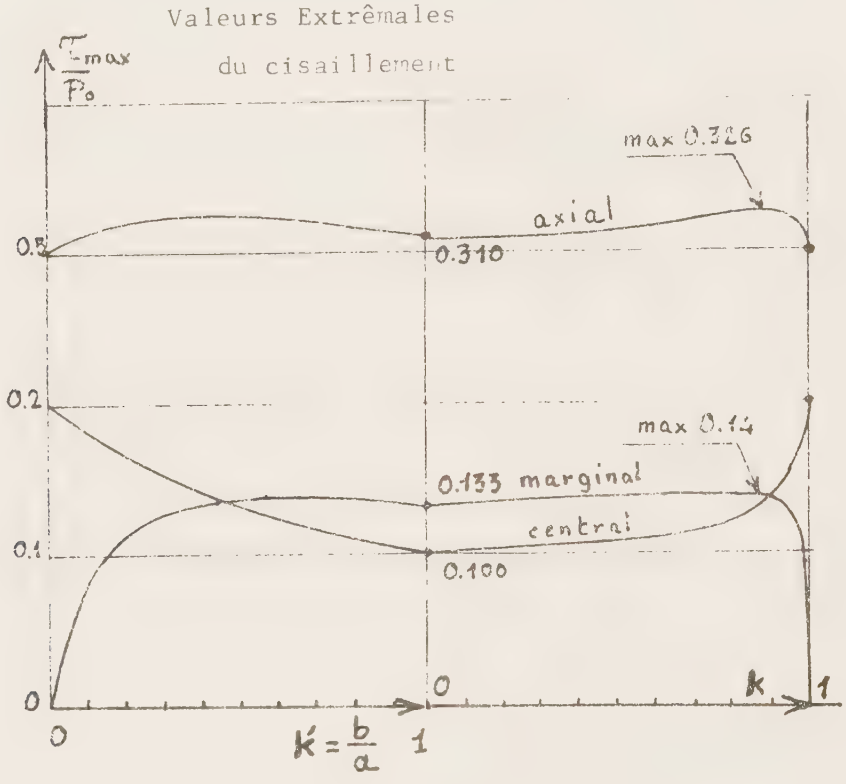
$$k \# 0,9$$

$$\zeta = \frac{z}{b} = 0,66$$

$$\tau = 0,326\ p_o$$

C - VALEURS EXTREMALES

Pour se limiter au critère du cisaillement maximal, les valeurs extrêmes qui se produisent sur l'axe (cisaillement axial), et à l'extrémité du grand axe (cisaillement marginal), sont figurées au diagramme ci-dessous en fonction de k ou de $k' = \frac{b}{a}$.



Ce diagramme donne également le cisaillement maximal au centre du contact (cisaillement central), toujours inférieur au cisaillement maximum axial, et qui avait été comparé par BELAJEV au cisaillement marginal. BELAJEV avait indiqué que le cisaillement marginal était prépondérant pour les valeurs de k inférieures à 0,89. Ce résultat s'obtient à partir des expressions (123) et (127), comme solution de l'équation:

$$\text{Arg th } k = \frac{k}{2}\left(1 + \frac{1}{k'}\right)$$

soit $k = 0{,}89098$ $\qquad k' = \frac{b}{a} = 0{,}45404$

Cette valeur ne dépend pas du coefficient de POISSON.

D - COMPARAISON AU CAS DU POINCON SPHERIQUE

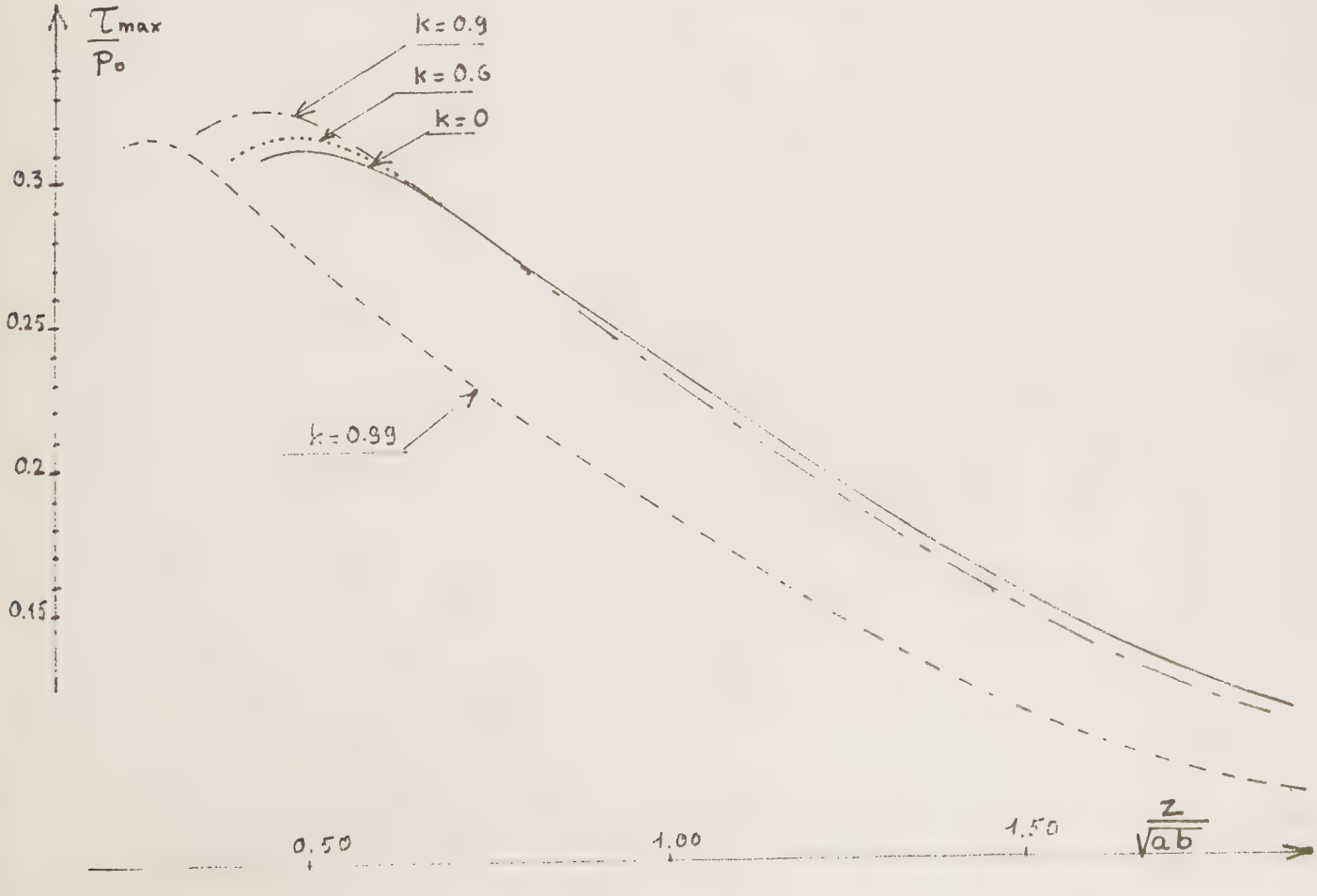
Cette comparaison s'applique à deux types de problèmes:

• pour une vérification auxiliaire rapide de contraintes locales, il est commode de remplacer un contact elliptique par un contact sphérique de même charge et même surface; on voit sur le diagramme précédent que, pour des excentricités modérées (jusqu'à k = 0,9 par exemple), les valeurs extrêmales s'écartent peu de celles du poinçon sphérique. Par ailleurs, le point le plus sollicité sur l'axe est également peu modifié:

pour k = 0,9 ; $\frac{z\ (max)}{\sqrt{ab}}$ = 0,66 k' = 0,436, au lieu de 0,481 pour le poinçon sphérique de comparaison.

• pour un calcul de structure lié à une sollicitation locale de contact elliptique, il peut être utile, indépendamment du calcul des contraintes locales, de déterminer à partir de quelle distance du centre de charge le contact peut être assimilé à un contact plus simple: sphérique ou ponctuel:

Sur l'axe, le diagramme ci-dessous donne le cisaillement maximal en fonction de $\frac{z}{\sqrt{ab}}$, pour différentes valeurs de k, ab étant constant pour des poinçons de même charge totale, et de même pression p_o sur l'axe.



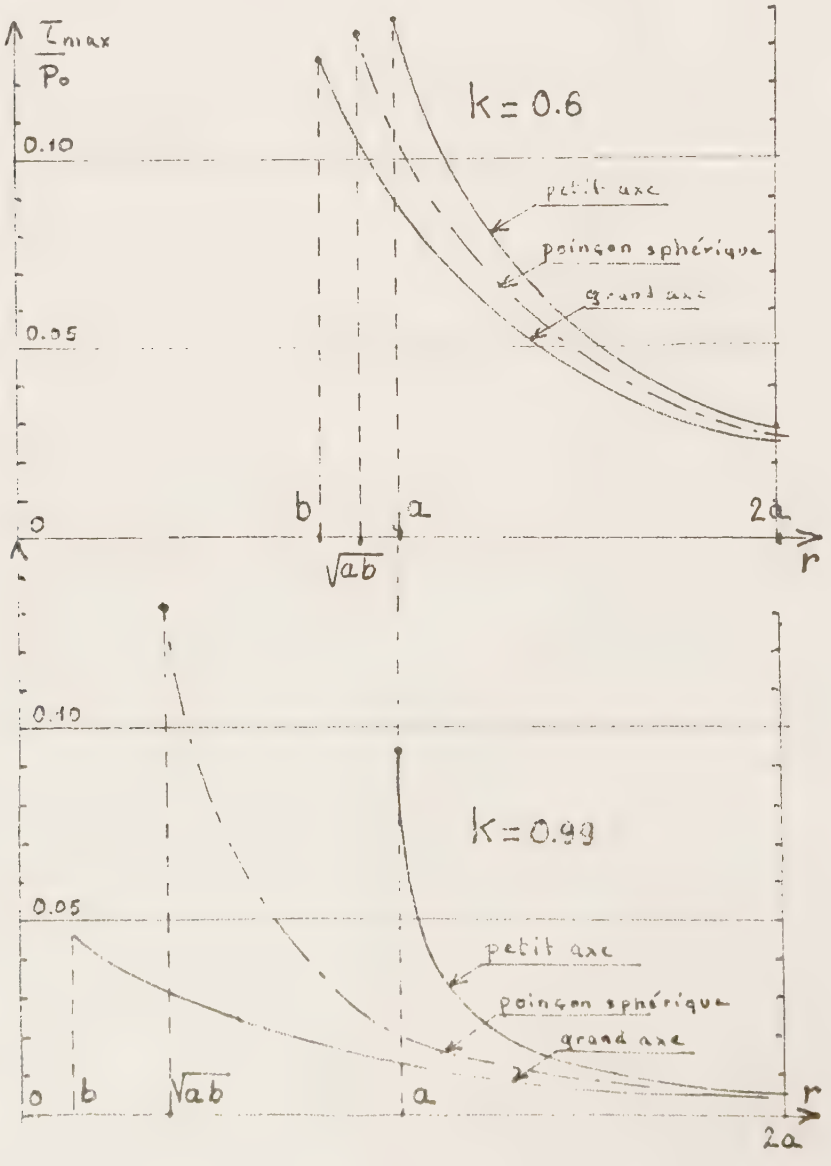
Pour des valeurs de k inférieures à 0,9 environ le cisaillement tend rapidement, peu au delà du maximum, vers celui du poinçon sphérique équivalent, soit pour:

$$z > \frac{2}{3}\sqrt{ab} \text{ env.} \geqslant b$$

Pour de fortes excentricités: $k > 0{,}9$, la répartition des contraintes au voisinage de la surface est voisine de celle du problème à deux dimensions, et s'écarte de plus en plus de celle du poinçon sphérique; elle s'en rapproche sensiblement à une distance qui est fonction non plus de b, mais de la longueur du demi-grand axe a.

On vérifie que, pour $z > 2a$, l'écart reste inférieur à $\frac{5}{1000}\, p_o$ sur le cisaillement maximal, $\frac{1}{100}\, p_o$ sur les contraintes.

En surface, les diagrammes ci-dessous comparent le cisaillement maximal selon les deux axes en dehors de la zône chargée au cisaillement de surface dû à un poinçon sphérique de même charge et de rayon de contact égal à $\sqrt{ab}$.



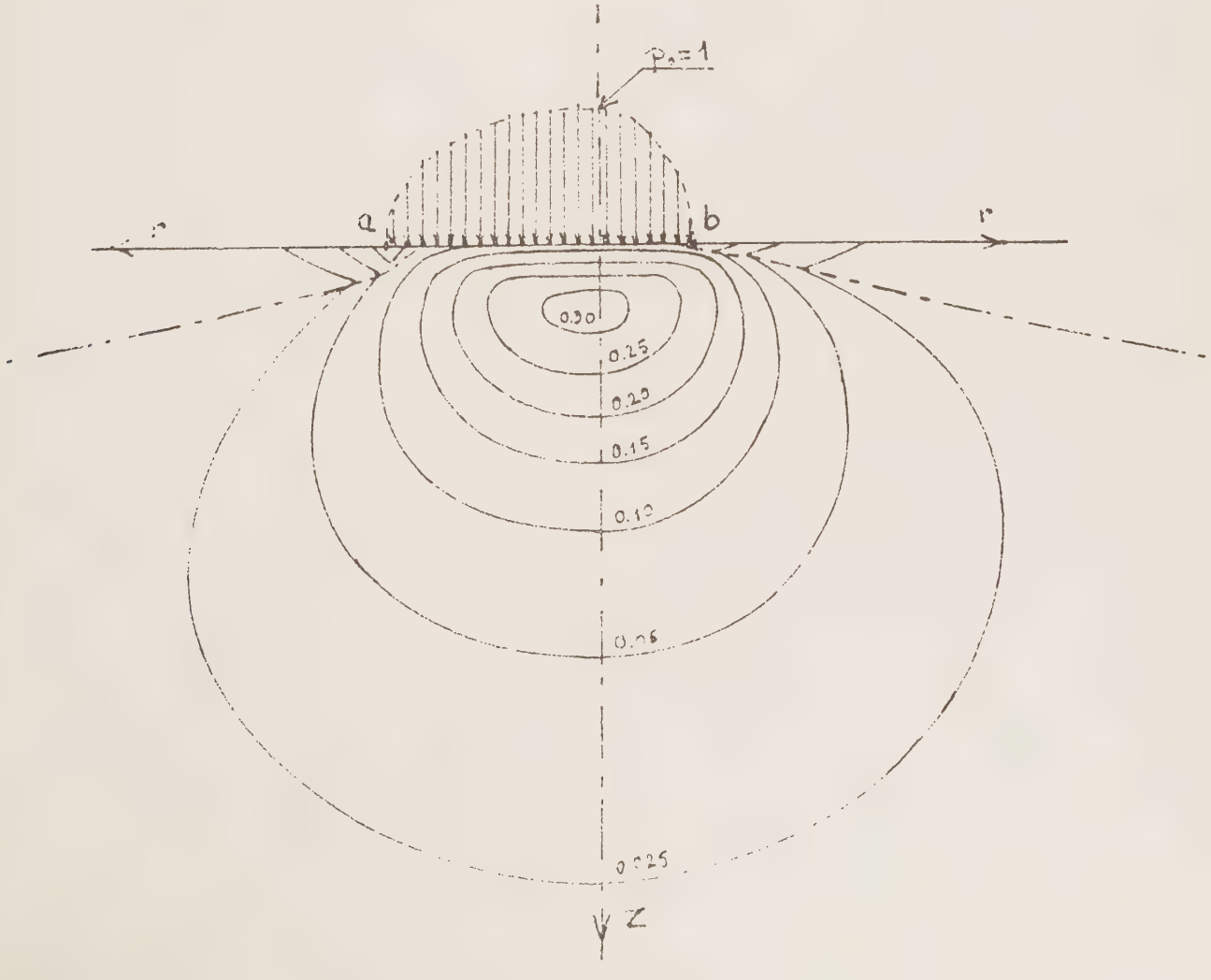
Les deux figures correspondent à une faible et une forte excentricité.

Dans tous les cas, le cisaillement devient trés proche de celui du poinçon sphérique équivalent à partir de $r \geqslant 2a$, l'écart maximal à cette distance n'excédant pas $\frac{2}{1000}\ p_o$.

Si l'on admet que l'erreur commise dans le calcul des contraintes à la distance d du centre de charge reste inférieure ou de même ordre que l'erreur calculée sur l'axe ou en surface,

le remplacement du poinçon par un poinçon sphérique équivalent, avec une erreur maximale de $\frac{1}{100}\ p_o$ env. sur les composantes de contraintes, ou de $\frac{5}{1000}\ p_o$ sur le cisaillement maximal, est justifié à partir d'une distance au centre de charge égale ou supérieure à 2a , grand axe de l'ellipse de contact.

Le croquis ci-dessous présente la disposition des courbes d'égal cisaillement maximal selon les deux plans de symétrie, pour une excentricité k = 0,9 .



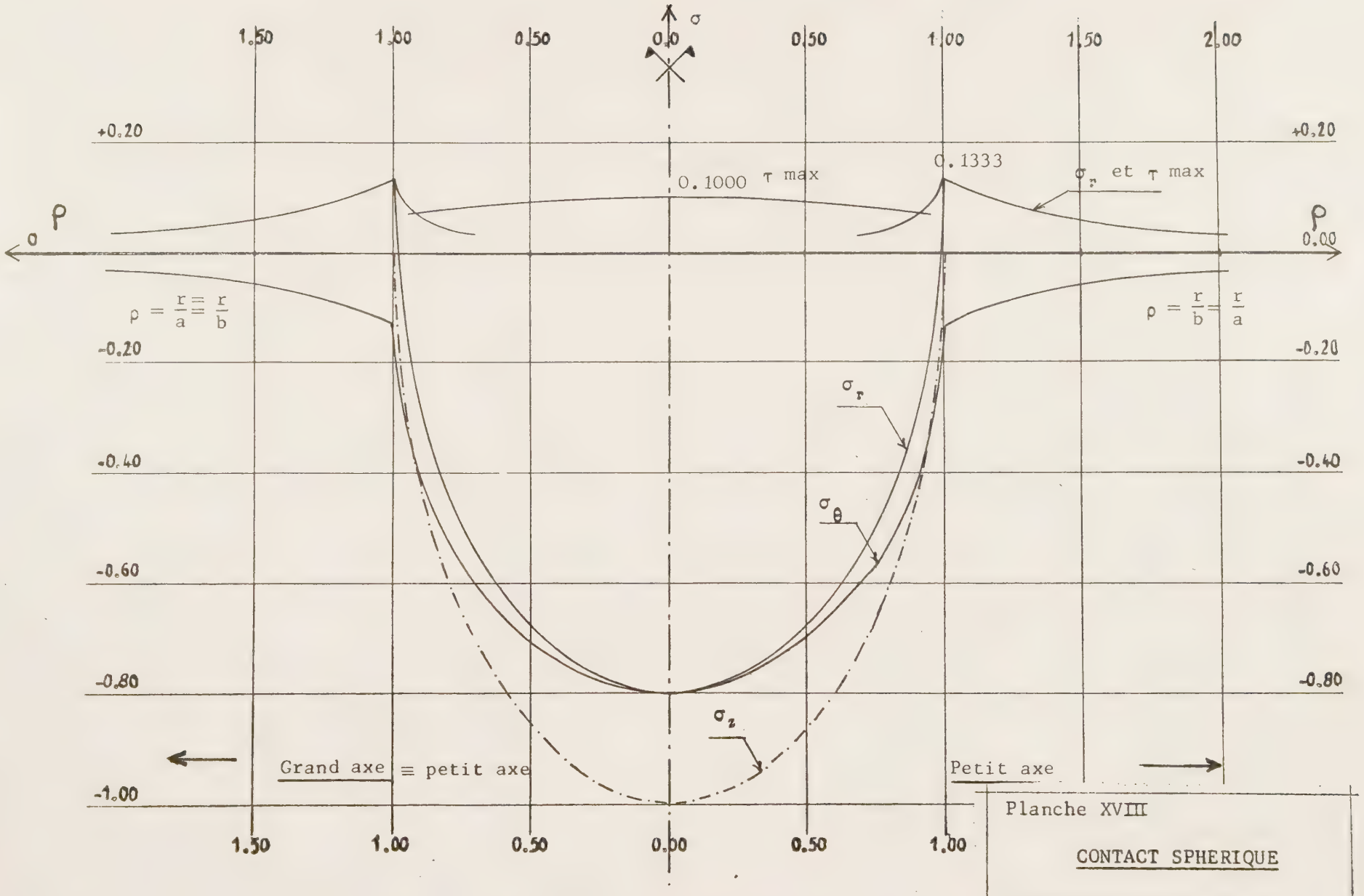


Planche XVIII

CONTACT SPHERIQUE

Contraintes de surface

$\nu = 0.3 \quad K = 0 \quad \frac{b}{a} = 1$

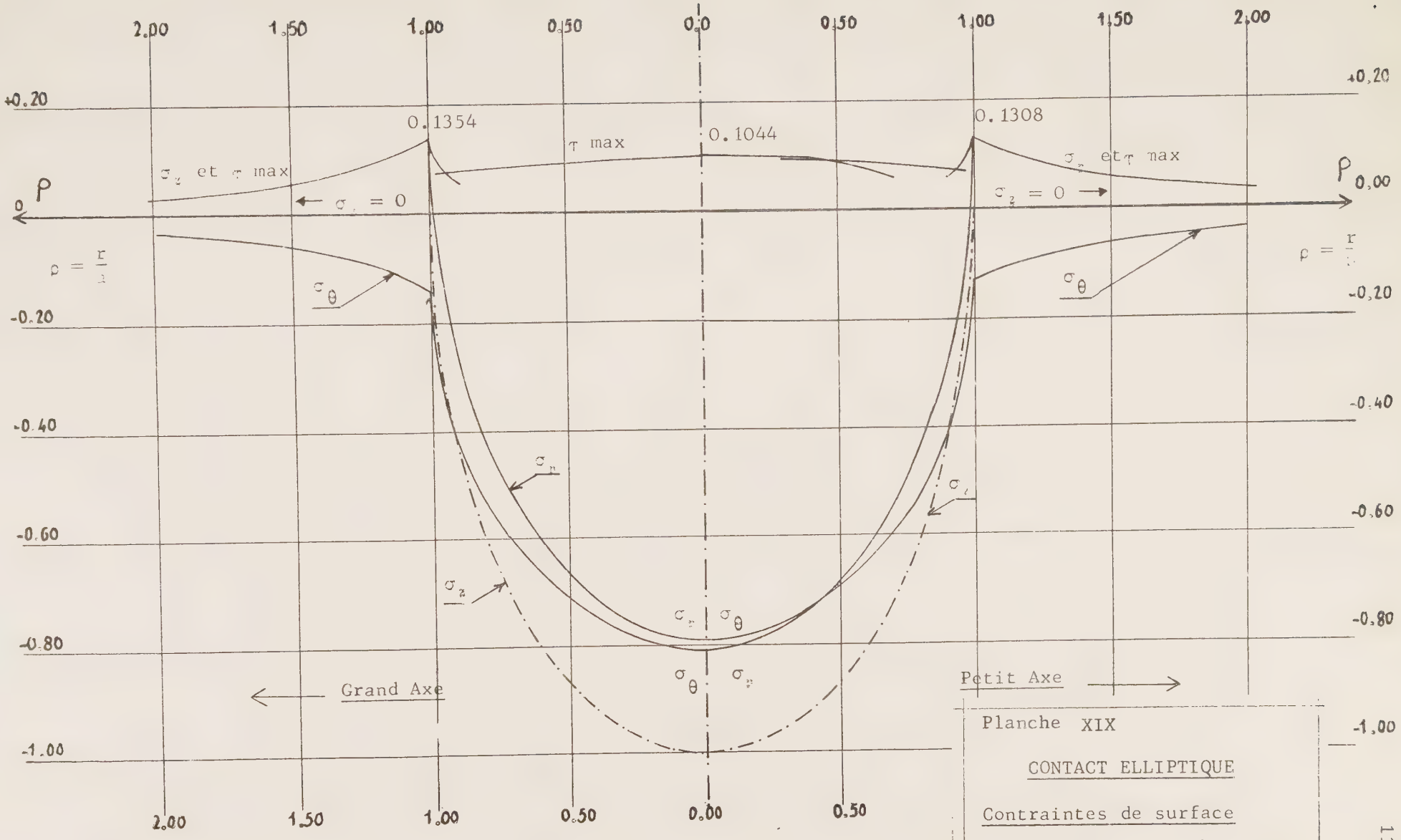


Planche XIX

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface

$\nu = 0.3 \quad K = 0.4 \quad \frac{b}{a} = 0.917$

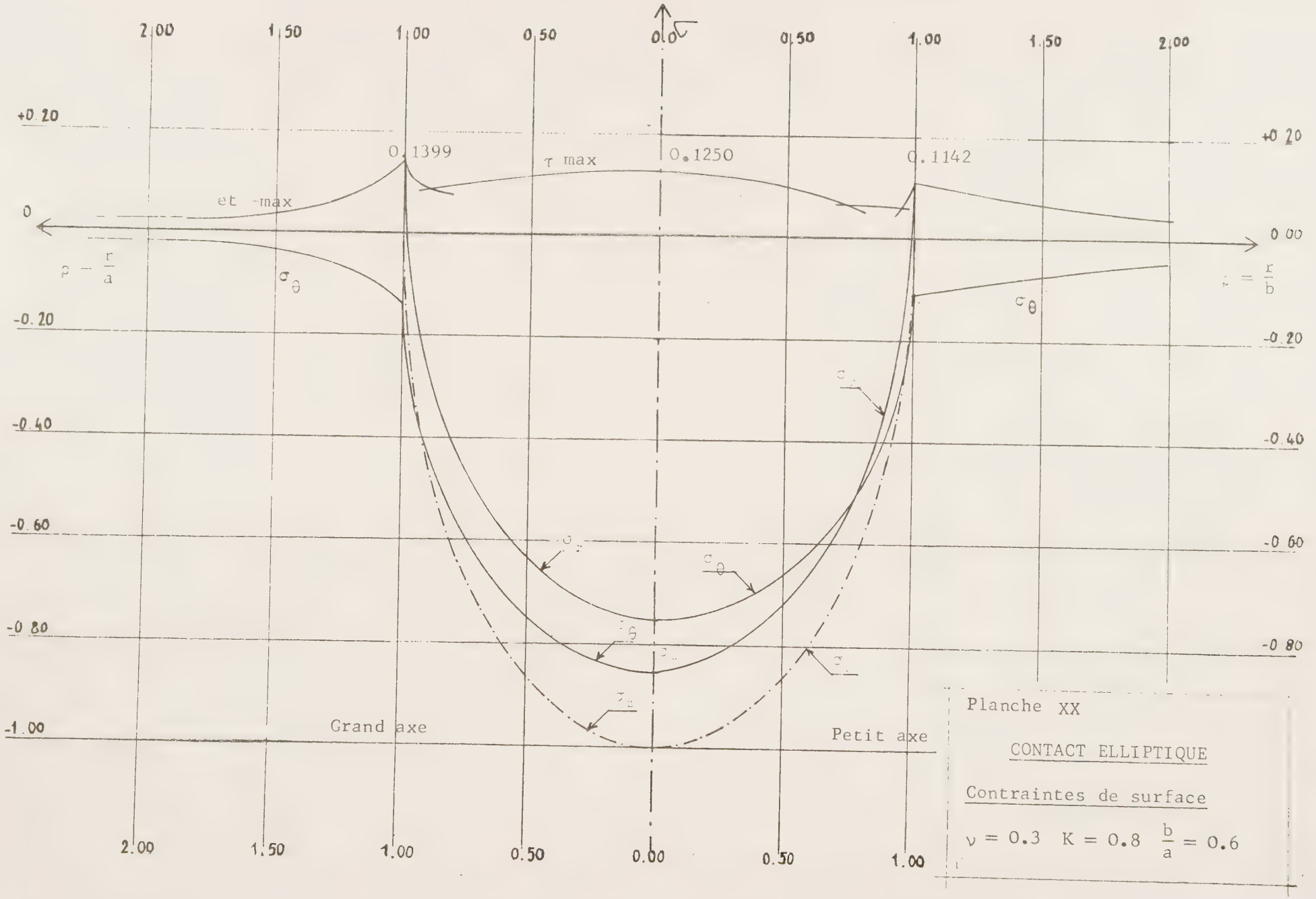


Planche XX

CONTACT ELLIPTIQUE

Contraintes de surface

$\nu = 0.3 \quad K = 0.8 \quad \frac{b}{a} = 0.6$

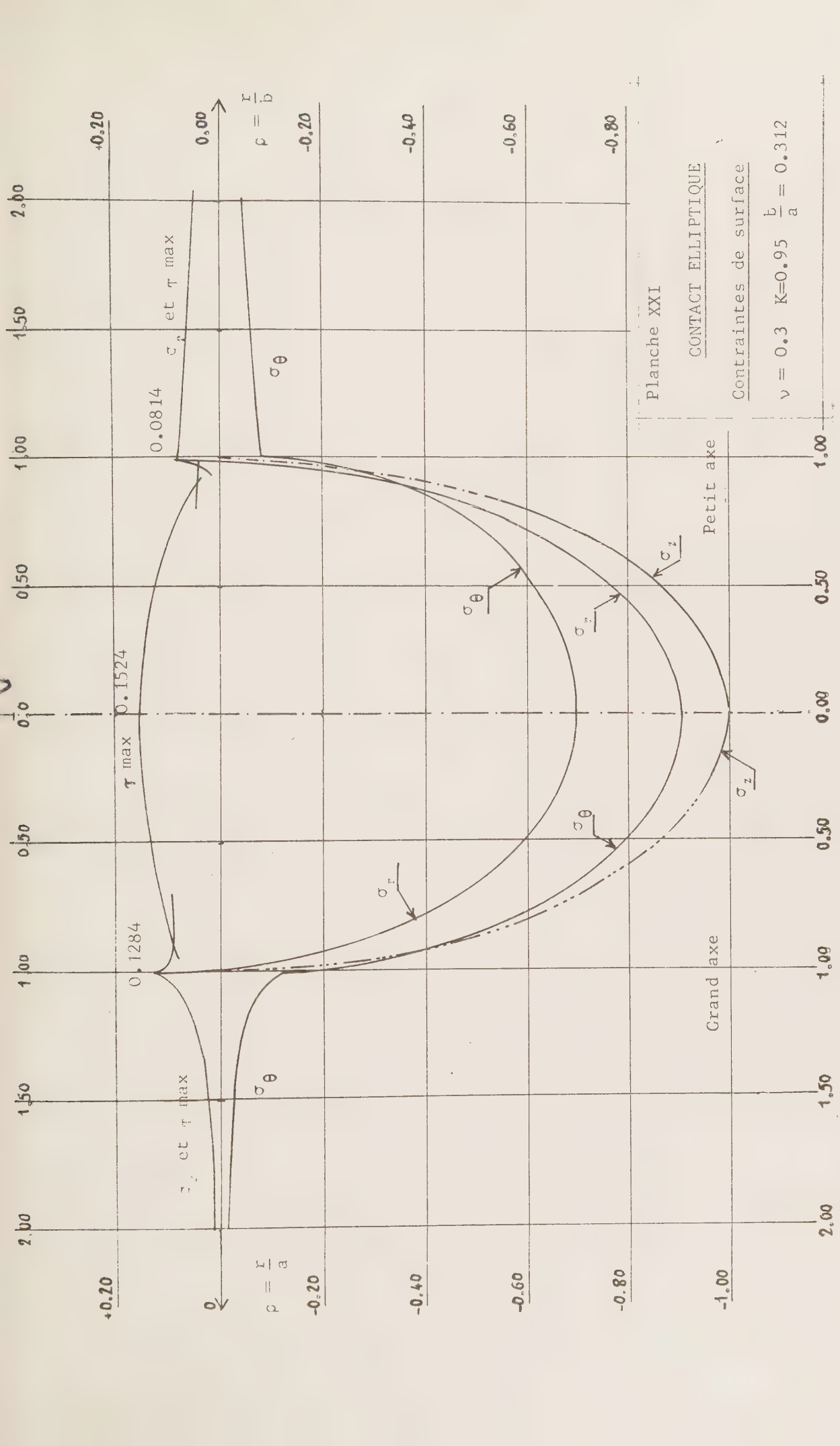
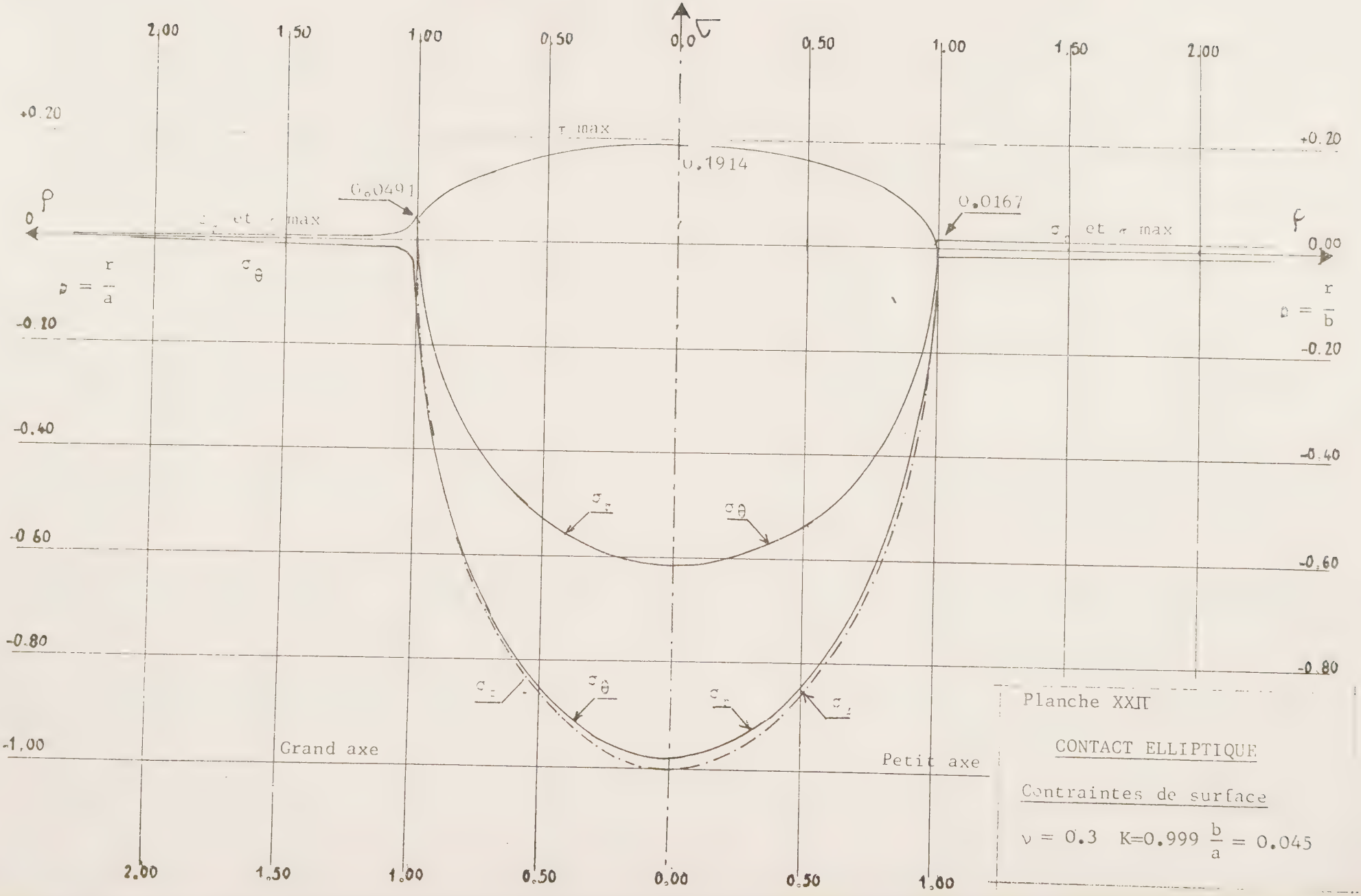


Planche XXI
CONTACT ELLIPTIQUE
Contraintes de surface
ν = 0.3 K=0.95 b/a = 0.312
Petit axe
Grand axe
ρ = r/b
ρ = r/a
τ max
0.1524
0.1284
0.0814
σr
σθ
σz


2,00
1,50
1,00
0,50
0,0
0,50
1,00
1,50
2,00
+0.20
-0.20
-0.40
-0.60
-0.80
-1.00
τ max
0,1914
0,0491
0,0167
σz et τ max
σz et τ max
ρ
0
f
0,00
p = r/a
p = r/b
σθ
σz
σθ
σz
σz
σθ
σz
Grand axe
Petit axe
Planche XXII
CONTACT ELLIPTIQUE
Contraintes de surface
ν = 0.3 K=0.999 b/a = 0.045

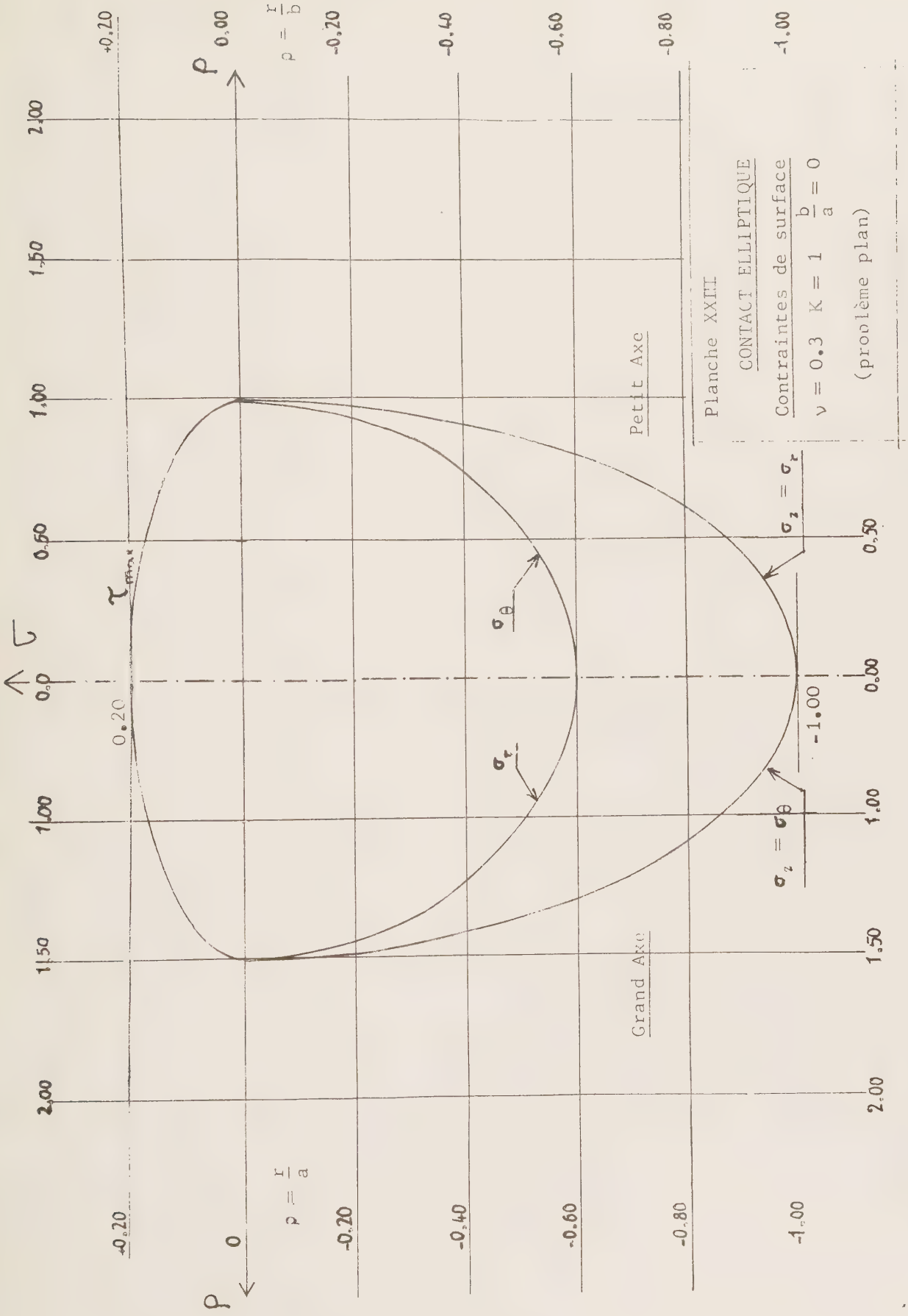


Planche XXII
CONTACT ELLIPTIQUE
Contraintes de surface
ν = 0.3 K = 1 b/a = 0
(problème plan)
Petit Axe
Grand Axe
τmax
σθ
σr
σz = σr
σz = σθ
0.20
-1.00
ρ = r/a
ρ = r/b

Cisaillement max. sur l'axe

$\zeta = \frac{z}{b}$ $\quad \kappa = (1 - \frac{b^2}{a^2})^{\frac{1}{2}}$

$\nu = 0,3$

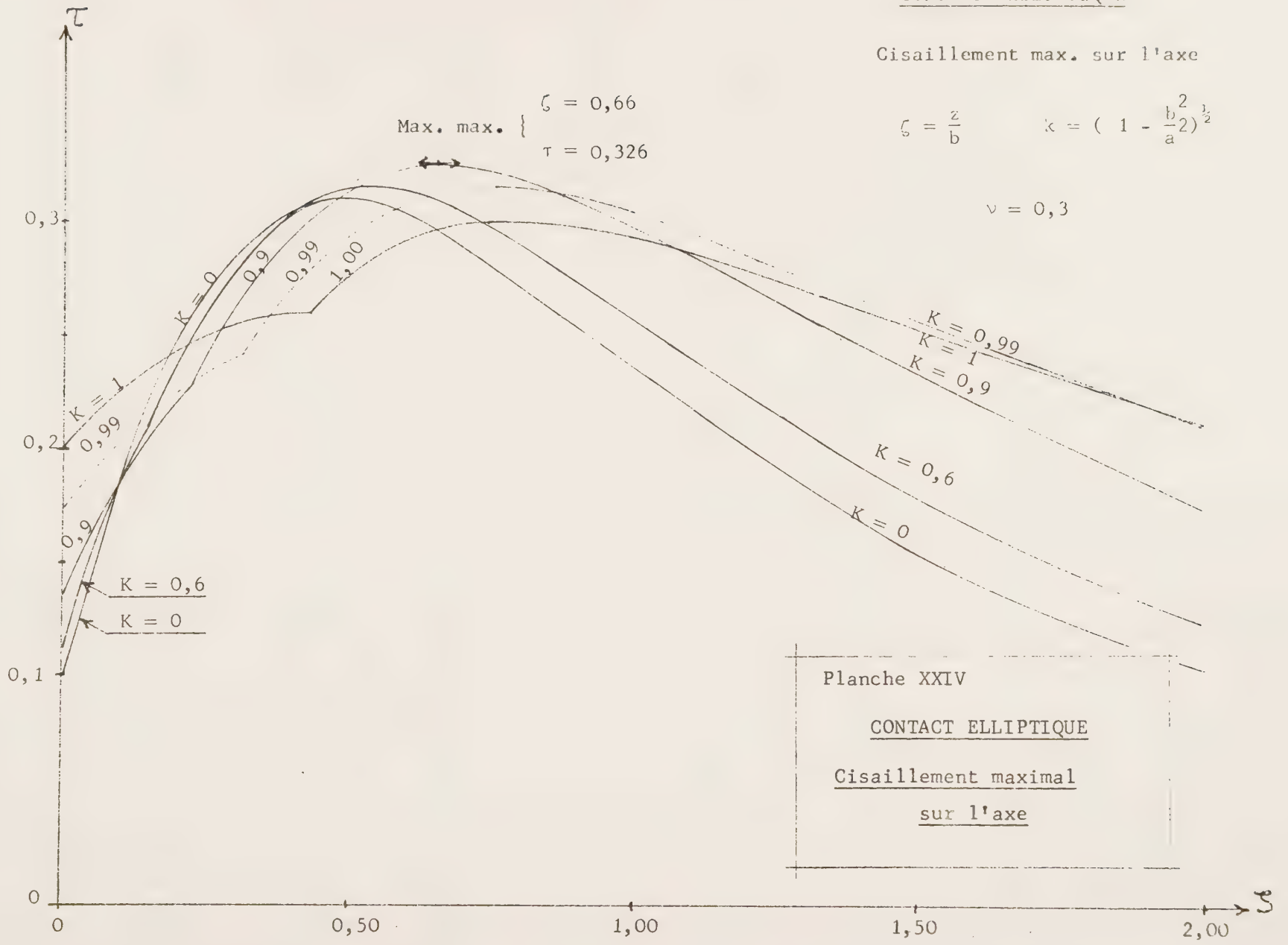


Planche XXIV

CONTACT ELLIPTIQUE

Cisaillement maximal

sur l'axe

Calcul de $z = \text{Arc tg } Z$

$$Z = X + iY$$

$$z = x + ix$$

$$Z = \text{tg } z = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}$$

Après identification des parties réelle et imaginaire, et discussion des différentes déterminations, on obtient :

$$x = \frac{1}{2} \text{ Arc tg } \frac{2X}{1 - (X^2 + Y^2)} + k\pi \qquad \text{si} \quad |Z| < 1$$

$$x = \frac{1}{2} \text{ Arc tg } \frac{2X}{1 - (X^2 + Y^2)} + \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \text{si} \quad |Z| > 1$$

$$y = \text{Log } \frac{(1 + Y)^2 + X^2}{\sqrt{(X^2 + Y^2 - 1)^2 + 4X^2}}$$

Le nombre entier k caractérise une détermination particulière de la solution z.

Calcul de $z = \text{Arg sh } Z$

$$\begin{cases} Z = X + iY \\ z = x + iy \end{cases}$$

$$Z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Après identification des parties réelle et imaginaire et discussion des différentes déterminations, on obtient :

$$x = \epsilon \text{Argsh} \sqrt{\frac{X^2+Y^2-1+\sqrt{(X^2+Y^2-1)^2+4X^2}}{2}}$$

pour $X > 0$ et $Y > 0$ $\quad y = \epsilon \text{Arcsin} \sqrt{\frac{X^2+Y^2+1-\sqrt{(X^2+Y^2-1)^2+4X^2}}{2}} + \frac{1-\epsilon}{2}\pi + 2k\pi$

$X > 0$, $Y < 0$ $\quad y = -\epsilon \text{Arcsin} \sqrt{\frac{X^2+Y^2+1-\sqrt{(X^2+Y^2-1)^2+4X^2}}{2}} + \frac{1-\epsilon}{2}\pi + 2k\pi$

$X < 0$, $Y < 0$ $\quad y = \epsilon \text{Arcsin} \sqrt{\frac{X^2+Y^2+1-\sqrt{(X^2+Y^2-1)+4X^2}}{2}} + \frac{1+\epsilon}{2}\pi + 2k\pi$

$X < 0$, $Y > 0$ $\quad y = -\epsilon \text{Arcsin} \sqrt{\frac{X^2+Y^2+1-\sqrt{(X^2+Y^2-1)^2+4X^2}}{2}} + \frac{1+\epsilon}{2}\pi + 2k$

Les paramètres $\epsilon = \pm 1$ et k nombre entier caractérisent une détermination particulière de la solution z.

Charge uniformément répartie sur une ellipse — $\nu = 0,3$ $p_o = 1$ k variable — 127

Contraintes sur l'axe normal

1° Valeurs de σ_z (selon DERESIEWICZ)

ζ \ K	0	0,3	0,6	0,9	0,99
0	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
0.1	0.9990	0.9991	0.9993	0.9995	0.9996
0.2	0.9925	0.9929	.09943	0.9950	0.9967
0.4	0.9488	0.9518	0.9604	0.9732	0.9859
0.7	0.8114	0.8201	0.8470	0.8932	0.9087
1.0	0.6464	0.6587	0.6995	0.7820	0.8150
1.5	0.4240	0.4365	0.4816	0.5978	0.6624
2	0.2845	0.2947	0.3333	0.4529	0.5390
3	0.1462	0.1524	0.1767	0.2704	0.3773
4	0.0869	0.0908	0.1065	0.1739	0.2804
5	0.0549	0.0556	0.0705	0.1194	0.2169
10	0.0148	0.0156	0.0185	0.0331	0.0824

2° Valeurs de σ_θ (parallèle au petit axe) (selon DERESIEWICZ)
σ_r (parallèle au grand axe)

ζ \ K	0		0,3		0,6		0,9		0.99 (1)	
	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r	σ_θ	σ_r
0	0.8000	0.8000	0.8047	0.7953	0.8222	0.7778	0.8786	0.7214	0.9636	0.6364
0.05	0.7351	0.7351	0.7404	0.7330	0.7585	0.7244	0.8157	0.6875	0.8987	0.6158
0.1	0.6711	0.6711	0.6765	0.6716	0.6954	0.6716	0.7535	0.6538	0.8343	0.5954
0.2	0.5488	0.5488	0.5542	0.5542	0.5744	0.5694	0.6338	0.5875	0.7100	0.5551
0.4	0.3428	0.3428	0.3488	0.3531	0.3681	0.3894	0.4236	0.4647	0.5003	0.4849
0.7	0.1488	0.1488	0.1524	0.1599	0.1668	0.1999	0.2094	0.3137	0.2587	0.3839
1.0	0.0575	0.0575	0.0600	0.0648	0.0673	0.0949	0.0928	0.2060	0.1235	0.3105
1.5	0.0064	0.0064	0.0067	0.0090	0.0086	0.0229	0.0134	0.0997	0.0179	0.2270
2	0.0050	0.0050	0.0051	0.0037	0.0055	0.0017	0.0050	0.0457	0.0277	0.1721
3	0.0064	0.0064	0.0062	0.0067	0.0078	0.0054	0.0115	0.0080	0.0604	0.1095
4	0.0046	0.0046	0.0030	0.0064	0.0058	0.0046	0.0092	0.0011	0.0723	0.0761
5	0.0033	0.0033	0.0019	0.0050	0.0038	0.0040	0.0069	0.0030	0.0783	0.0566
10	0.0009	0.0009	0.0015	0.0001	0.0010	0.0013	0.0021	0.0018	0.0898	0.0252

(1) cf. valeurs modifiées au § 3°

(2) valeurs au dessus de la ligne horizontale : compression
au dessous de la ligne horizontale : traction

3° Valeurs modifiées de σ_z, σ_θ, σ_r pour l'excentricité K = 0.99

ζ	σ_z	σ_θ	σ_r
0	valeurs inchangées	- 0.6495	- 0.9506
0.1		- 0.6061	- 0.8247
0.2		- 0.5635	- 0.7037
0.4		- 0.4835	- 0.4914
0.5		- 0.4469	- 0.4042
0.7		- 0.3818	- 0.2680
0.85		- 0.3399	- 0.1947
1.0		- 0.3033	- 0.1406
1.5		- 0.2123	- 0.0444
2		- 0.1534	- 0.0089
3		- 0.0850	0.0105
5		- 0.0290	0.0118
10		- 0.0014	0.0054

Valeurs obtenues à l'aide des expressions de DERESIEWICZ, avec calcul direct des fonctions elliptiques.

Expressions des contraintes dans les plans de symétrie du contact d'après l'étude de BESSELING, VAN BOMMEL et TEN HOEVE

1°) Notations

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{(a^2-x^2-z^2) + \sqrt{(a^2-x^2-z^2)^2+4a^2z^2}}{2a^2}}$$

$$\mathrm{sh}\alpha = \sqrt{\frac{-(a^2-x^2-z^2) + \sqrt{(a^2-x^2-z^2)^2+4a^2z^2}}{2a^2}}$$

pour $b \leq a$

$$k = \frac{b}{a} < 1 \qquad k^* = \sqrt{1-k^2} \qquad \cot\varphi = \mathrm{sh}\alpha \qquad \tau = \frac{1}{\mathrm{ch}\alpha}\sqrt{k^2+\mathrm{sh}^2\alpha}$$

pour $b \geq a$

$$k = \frac{a}{b} < 1 \qquad k^* = \sqrt{1-k^2} \qquad \cot\varphi^* = k\,\mathrm{sh}\alpha \qquad \tau^* = \frac{\mathrm{ch}\alpha}{\sqrt{1+k^2\mathrm{sh}^2\alpha}}$$

fonctions elliptiques:

$$E(k^*,\varphi) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^{*2}\sin^2\theta}\, d\theta \qquad B(k^*,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\cos^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\theta}}$$

$$F(k^*,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\theta}} \qquad D(k^*,\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{\sin^2\theta\, d\theta}{\sqrt{1-k^{*2}\sin^2\theta}}$$

2°) Composantes des contraintes (le demi-diamètre a est porté par Ox)

pour $b \leq a$ $\qquad k = \frac{b}{a}$

$$\frac{\sigma_x}{p_o} = \mathrm{sh}\alpha\sin\beta\left[2k(1-\nu)D(k^*,\varphi)+\frac{2\nu}{k}E(k^*,\varphi)-\frac{k}{\tau}\frac{\mathrm{th}\alpha\cos^2\beta}{\mathrm{ch}\alpha(\mathrm{sh}^2\alpha+\sin^2\beta)}\right] - \frac{2\nu\tau}{k}\sin\beta$$

$$- \frac{k(1-2\nu)}{k^{*2}}\left[1-\tau\sin\beta+\frac{\mathrm{ch}\alpha\cos\beta}{2k^*}\,\mathrm{Log}\,\frac{(\mathrm{ch}\alpha\cos\beta-k^*)^2}{\left|k^{*2}\cos 2\beta+\tau k^*\sin 2\beta\,\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{ch}^2\alpha\cos^2\beta\right|}\right]$$

$$\frac{\sigma_y}{p_o} = \frac{\mathrm{sh}\alpha\sin\beta}{k}\left[2(1-\nu)B(k^*,\varphi)+2\nu E(k^*,\varphi)-2(1-\nu)\,\frac{\mathrm{th}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha}\,\frac{1}{\tau}\right] - \frac{2\nu\tau}{k}\sin\beta$$

$$-(1-2\nu)\,\frac{k}{k^{*2}}\left[\frac{\sin\beta}{\tau}-1-\frac{\mathrm{ch}\alpha\cos\beta}{2k^*}\,\mathrm{Log}\,\frac{(\mathrm{ch}\alpha\cos\beta-k^*)^2}{\left|k^{*2}\cos 2\beta+\tau k^*\sin 2\beta\,\mathrm{ch}\alpha-\mathrm{ch}^2\alpha\cos^2\beta\right|}\right]$$

$$\frac{\sigma_z}{p_o} = -\frac{k\,\mathrm{ch}\alpha\sin^3\beta}{(\mathrm{sh}^2\alpha+\sin^2\beta)\sqrt{k^2+\mathrm{sh}^2\alpha}}$$

$$\frac{\tau_{zx}}{p_o} = -\frac{1\,\mathrm{sh}\alpha\cos\beta\sin^2\beta}{(\mathrm{sh}^2\alpha+\sin^2\beta)\sqrt{k^2+\mathrm{sh}^2\alpha}}$$

Annexe n°4 (suite)

Composantes des contraintes

pour $b \geq a$ $\quad k = \frac{a}{b}$

$$\frac{\sigma_x}{p_o} = sh\alpha \sin\beta \left[2(1-\nu) B(k^*, \varphi^*) + 2\nu E(k^*, \varphi^*) - \tau^* \frac{2ch\alpha sh\alpha - th\alpha \cos^2\beta}{ch\alpha (sh^2\alpha + \sin^2\beta)} \right] - \frac{2\nu\tau^*}{ch^2\alpha} \sin\beta$$

$$- \frac{1-2\nu}{k^{*2}} \left[\frac{\sin\beta}{\tau^*} - k + \frac{k^2}{2k^*} ch\alpha \cos\beta \left\{ Arcsin \frac{-ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2}{ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. + Arcsin \frac{ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2 \cos 2\beta}{ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2} \right\} \right]$$

$$\frac{\sigma_y}{p_o} = sh\alpha \sin\beta \left[2k^2 (1-\nu) D(k^*, \varphi^*) + 2\nu E(k^*, \varphi^*) \right] - 2\nu\tau^* \sin\beta$$

$$- \frac{k}{k^{*2}} (1-2\nu) \left[1 - k\tau^* \sin\beta - \frac{k}{2k^*} ch\alpha \cos\beta \left\{ Arcsin \frac{-ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2}{ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2} \right.\right.$$

$$\left.\left. + Arcsin \frac{ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2 \cos 2\beta}{ch^2\alpha \cos^2\beta + (\frac{k^*}{k})^2} \right\} \right]$$

$$\frac{\sigma_z}{p_o} = - \frac{ch\alpha \sin^3\beta}{(sh^2\alpha + \sin^2\beta) \sqrt{1 + k^2 sh^2\alpha}}$$

$$\frac{\tau_{zx}}{p_o} = - \frac{sh\alpha \cos\beta \sin^2\beta}{(sh^2\alpha + \sin^2\beta) \sqrt{1 + k^2 sh^2\alpha}}$$

0

0 0

BIBLIOGRAPHIE

BELAJEV — Mémoire sur la théorie des structures — 1924
Travaux en élasticité et plasticité — 1957

BESSELING, VAN BOMMEL, TEN HOEVE — Calcul du problème élastique tridimensionnel et du problème élastoplastique bidimensionnel concernant les contraintes dans le champignon du rail. Office de Recherche et d'Essais de l'Union Internationale des Chemins de Fer DT 9 — 1968

BOUSSINESQ — Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques — 1885

CLEBSCH, B. DE SAINT VENANT — Théorie de l'élasticité des corps solides — 1883

COURBON — Résistance des matériaux — 1964

GOUDET — Les fonctions de Bessel — 1954

DERESIEWICZ — The half space under pressure distributed over an elliptical portion of its plane boundary. Jour. Appl. Mech. Trans. ASME vol 111 — 1960

HERTZ — Uber die Berührung fester elastischer Körper. Jour. f. d. reine und angewandte Math. vol 92 — 1882

KAMMERER — Cours de Résistance des Matériaux à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures ed. — 1968
Mécanique des milieux continus — 1970

L'HERMITE — Résistance des matériaux — 1954

PALME, KAMMERER, NIELD, DURING, JOHNSON, TEISSIER DU CROS, RADMANOVIC, BESSELING — Comportement du métal des rails et des roues dans la zône de contact. Office de Recherche et d'Essais de l'Union Internationale des Chemins de Fer C 53 / RP. Résultats partiels N°2 : Etude photoélasticimétrique tridimensionnelle d'un modèle de rail chargé mais non fléchi — 1965
Résultats partiels N°5 : Etude expérimentale des contraintes dans un rail par photoélasticimétrie et extensométrie ....

BIBLIOGRAPHIE (suite)

PIGEAUD — Résistance des matériaux et élasticité (3^e ed.) — 1948

SNEDDON, HARDING — The elastic stresses produced by the indentation of the plane surface of a semi-infinite elastic solid by a rigid punch — Proc. Camb. Phil. Soc. — 1945

SNEDDON — Boussinesqs problem for a flat ended cylinder — Proc. Camb. Phil. Soc. — 1946

The relation between load and penetration in the axi-symmetric Boussinesqs problem for a punch of arbitrary profile — Proc. Camb. Phil. Soc. — 1965

THOMAS, HOERSCH — Stresses due to the pressure of one elastic solid upon another — Univ. Illinois Bull. N° 46 Vol. XXVII — 1960

TIMOSHENKO, GOODIER — Théorie de l'élasticité (2^e ed.) — 1961

WAY — Some observations on the theory of contact pressures — Jour. Appl. Mech. Trans. ASME vol. 62 — 1940

0

0 0

pages

INTRODUCTION

PREMIERE PARTIE - PROBLEME DE BOUSSINESQ POUR UN POINCON SPHERIQUE

CHAPITRE I - CALCUL DES TENSIONS

A - Méthode et base des calculs 5

B - Calcul des fonctions auxiliaires I_m^n

1° Notations 7

2° Abaissement du degré du dénominateur 7

3° Calcul de I_{11}, I_{12} et I_{21} 11

C - Expression des tensions

1° Coordonnées et contraintes réduites 16

2° Expression générale des contraintes 16

3° Cas de simplification 18

D - Calcul numérique 20

CHAPITRE II - ETUDE DE LA DISTRIBUTION DES TENSIONS ET PROBLEMES ANNEXES

A - Diagrammes des contraintes 28

Planches I à VI 34

B - Critères de sécurité 40

Planches VII à XII 46

C - Comparaison au cas de la charge concentrée 52

Planches XIII à XV 54

D - Déformée de surface, influence du déplacement horizontal de surface 57

E - Influence du coefficient de Poisson 64

Planches XVI et XVII 66

F - Extension au cas du poinçon élastique 68

DEUXIEME PARTIE - LE CONTACT ELLIPTIQUE

Remarques préliminaires - Objet de la deuxième partie 71

CHAPITRE I - TENSIONS DE SURFACE SELON LES AXES DU CONTACT

A - Principe du calcul 73

B - Effet d'une charge uniformément répartie sur une couronne elliptique d'épaisseur élémentaire 74

C - Cas particulier de la couronne circulaire, extension au cas d'une charge de révolution quelconque 80

D - Charge à symétrie elliptique, contact elliptique 82

CHAPITRE II - CALCUL DES TENSIONS SELON L'AXE NORMAL

A - Principe et base des calculs 105

B - Intégration numérique des expressions de DERESIEWICZ 107

CHAPITRE III - DIAGRAMMES DE CONTRAINTES, INFLUENCE DE L'EXCENTRICITE, COMPARAISON AU CAS DU POINCON SPHERIQUE

A - Contraintes de surface 113

B - Contraintes sur l'axe 113

C - Valeurs extrêmales 114

D - Comparaison au cas du poinçon sphérique 116

Planches XVIII à XXIV 118

ANNEXES

1 . Fonction $z = \text{arctg } Z$ 125

2 . Fonction $z = \text{argsh } Z$ 126

3 . Tableaux de DERESIEWICZ 127

4 . Expression des contraintes selon les plans de symétrie du contact 129

BIBLIOGRAPHIE 131

0 0 0

Académie de Paris

UNIVERSITE de PARIS VI
11, Quai Saint Bernard - Paris 5

SERVICE DE LA SCOLARITE
Bureau des Enseignements du 3e Cycle

tél. 336 25 25 et 325.12.21

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : DOCTORAT ES SCIENCES

THESE DE : SCIENCES APPLIQUEES

NOM : BONNEVILLE

Prénoms : Pierre

né le 17 mars 19 26 à VINCENNES Dépt : SEINE

1ère THESE : Problème de Boussinesq pour un poinçon sphérique, contribution à l'étude du contact elliptique

2e THESE (Propositions faites par l'Université) : Octaèdres déformables

Vu et Approuvé

PARIS, le 3 février 1972

Le Président

de l'Université de PARIS VI

A. HERPIN